Beweise und Auflösungen

sämmtlicher

Lehrsätze und Aufgaben

der Anhänge

des Herrn Professors C. F. A. Jacobi

zu

den sieben ersten Büchern der Elemente der Geometrie
van Swinden's

bearbeitet

von

de Niem,

Major z. D. und Bezirks-Kommandeur.

Zweiter Theil.

Die Lehrsätze und Aufgaben der Jacobi'schen Anhänge zu Buch 5—7 der Elemente der Geometrie van Swinden's.

Mit Fig. 347—513 auf Tafel 41—74.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1868.

Vierter Abschnitt.

Ueber den Kreis.

I. Lehrsätze.

425. Wird eine Gerade, welche mit einem ihrer Endpunkte im Umfange eines Kreises liegt, von einem Durchmesser desselben unter rechten Winkeln halbirt, so liegt auch ihr anderer Endpunkt im Umkreise, d. h. sie ist eine Sehne des Kreises.

Beweis. Es liege die Gerade AB (Fig. 347.) mit dem Endpunkte A im Umfange des Kreises K und werde durch den Durchmesser CD in E unter rechten Winkeln halbirt, so soll auch der andere Endpunkt B im Umfange liegen. Wäre dies nicht der Fall, so könnte der Punkt B entweder nur ausserhalb des Kreises oder innerhalb desselben fallen. Angenommen er läge ausserhalb, etwa wie F, so ziehe man KF, dann ist $\triangle AEK \cong \triangle KEF$ (45), mithin AK = KF; nun ist aber AK ein Halbmesser, folglich müsste auch KF ein solcher sein, was offenbar ungereimt ist, da der Endpunkt F der Geraden KF ausserhalb des Kreises liegt, KF also grösser als ein Halbmesser sein muss. Mithin kann der Punkt B nicht ausserhalb des Kreises fallen. Fiele er innerhalb, etwa nach G, so ziehe man GK; dann wäre $\triangle AEK \cong \triangle KEG$ (45), daher AK = GK, also GK ein Halbmesser, was wiederum offenbar nicht möglich ist. Der Punkt B kann also auch nicht innerhalb des Kreises fallen. Da er nun weder ausserhalb, noch innerhalb liegen kann, so muss er im Umfange liegen, d. h. AB muss eine Sehne sein, w. z. b. w.

426. Jede Gerade, welche den Halbirungspunkt einer Sehne mit dem Halbirungspunkte eines der beiden zu ihr gehörigen Bogen verbindet, geht bei hinreichender Verlängerung durch den Mittelpunkt des Kreises und durch den Halbirungspunkt des anderen zugehörigen Bogens.

Beweis. Es sei (Fig. 347.) AE = BE = $\frac{1}{2}$ chord. AB; arc. AD = arc. BD = $\frac{1}{2}$ arc. ADB, so soll DE ein Durchmessers ein und arc. ACB halbiren. Man ziehe AD und BD, so ist

AD = BD (245, Z. 5)

folglich: △AED ≅ △BDE (50)

daher ∠AED = ∠BED = R (20)

mithin ist: DEC ein Durchmesser (248, Z. 1). Hieraus folgt nun aber: arc. CAD = arc. CBD (228)

arc. AD = arc. BD (V.)

folglich arc. AC = arc. BC, w. z. b. w.

427. Jede Gerade, welche die Halbirungspunkte zweier zu derselben Sehne gehörigen Bogen verbindet, ist ein Durchmesser und halbirt die gemeinschaftliche Sehne unter rechten Winkeln.

Beweis. Es sei (Fig. 347.) arc. AC = arc. BC; arc. AD = arc. BD. Man ziehe AD, BD, CD, so ist ∠BDC = ∠ADC (245), oder

∠BDE = ∠ADE

chord. AD = chord. BD (245, Z. 5)

folglich: △BDE ≅ △AED (45),

mithin: AE = BE = $\frac{1}{2}$AB

und: ∠AED = ∠BED = R (20)

folglich: CD ein Durchmesser (248, Z. 1), w. z. b. w.

428. Beschreibt man in einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck, halbirt die zu zwei Seiten gehörigen Bogen und verbindet diese Halbirungspunkte, so wird diese Gerade durch die beiden genannten Dreiecksseiten in drei gleiche Theile getheilt.

Beweis. Es sei △ABC (Fig. 348.) gleichseitig; arc. BD = arc. AD = $\frac{1}{2}$ arc. BDA und arc. AE = arc. CE = $\frac{1}{2}$ arc. AEC; da nun chord. AB = chord. AC(V.), so ist auch arc. BDA = arc. AEC; folglich auch arc. BD = arc. AD = arc. AE = arc. CE; zieht man AD und AE, so ist:

∠ADF = ∠DAF = ∠GAE = ∠AEG (245)

mithin DF = AF und GE = AG.

Ferner ist: $\angle CAE = \frac{1}{2} \angle BAC$ (245, Z. 1) $= 30^0$
Ebenso: $\angle AED = 30^0$

folglich $\angle AGF = \angle AED + \angle CAE$ (38) $= 60^0$.
Hieraus folgt, dass $\triangle AFG$ gleichseitig,
also $FG = AF = AG$
und daher: $DF = FG = GE$, w. z. b. w.

429. Fällt man aus den Endpunkten eines Kreisdurchmessers auf eine beliebige (verlängerte) Sehne zwei Senkrechte, so sind die zwischen den Fusspunkten der letztern und den Endpunkten der Sehne enthaltenen Segmente stets von gleicher Länge (DF = EG Fig. 349.).

Beweis. Man fälle $CH \perp DE$, so ist:
$AF \parallel CH \parallel BG$ (26, Z.)
und da: $AC = BC$, als Radien,
so ist: $HF = HG$ (195, Z. 2)
$DH = EH$ (248),

folglich: $DF = EG$, w. z. b. w.

Anmerkung 1. Wenn die Sehne den Durchmesser schneidet, so fallen beide in Rede stehenden Segmente innerhalb des Kreises. Sind BG und AF (Fig. 350.) die aus den Endpunkten des Durchmessers AB auf die ihn schneidende Sehne DE gefällten Senkrechten, und man zieht AG und verlängert die Senkrechte CH his K, so ist in Dreieck AGB:

$AC = BC$
$CK \parallel GB$

folglich $AK = GK$ (195, Z. 2).
Ferner ist in Dreieck AGF $HK \parallel AF$
folglich: $GH = HF$ (195, Z. 2)
$EH = DH$ (248)

daher $DF = GE$.

Anmerkung 2. Geht die Sehne durch einen der Scheitel des Durchmessers, wie BL (Fig. 350.) und man zieht AL, so ist Winkel ALB = R (246), also $AL \perp BL$; der Fusspunkt der Senkrechten fällt demnach mit dem Endpunkte der Sehne zusammen, das Segment der Sehne wird mithin gleich Null; die andere Senkrechte ist gleich Null, also auch das andere Segment der Sehne gleich Null; der Satz gilt daher für den vorliegenden Fall auch noch insofern, als die in Rede stehenden Sehnensegmente gleich Null sind.

Anmerkung 3. Der Satz kann als eine Erweiterung des 248. des fünften Buches angesehen werden.

430. Wenn von zwei Kreisbogen der eine das Zweifache des andern ist, so ist das Rechteck aus der Sehne des grössern und dem Kreishalbmesser gleich dem Rechteck aus den Sehnen

des kleinern Bogens und seines Supplementes, d. h. des Bogens, der ihn zum halben Umkreise ergänzt ($AD_r BC = AB_r AE$ Fig. 351.)

Beweis. Es sei (Fig. 351.) arc. AB = $\frac{1}{2}$ arc. ABD. Man ziehe den Durchmesser BE, so ist:

$$\text{arc. BAE} = \text{arc. BDE}$$
$$\text{arc. AB} = \text{arc. BD}$$

mithin arc. AE = arc. DE,

folglich AF = DF (A. 427) und BE ⊥ AD. Man ziehe AE und AC, so ist:

$$AD_r BC = 2 AF_r BC \text{ (72, Z. 3)}$$
$$= 4 \triangle ABC \text{ (84, Z. 1).}$$

Ferner ist AB ⊥ AE (246) und BC = CE als Radien, folglich:

$$AB_r AE = 2 \triangle ABE \text{ (84, Z. 1)}$$
$$= 4 \triangle ABC \text{ (84, Z. 3),}$$

mithin $AD_r BC = AB_r AE$, w. z. b. w.

430a. Ist ein Kreis gegeben und man beschreibt zwei mit ihm concentrische von solcher Grösse, dass die Summe der Quadrate ihrer Radien doppelt so gross als das Quadrat vom Halbmesser des gegebenen Kreises, so sind die Tangenten, die man an den innern Kreis zieht und bis zum Durchschnitt mit dem Umkreise des mittlern verlängert, von gleicher Grösse mit den an den mittleren Kreis gezogenen und bis zur Peripherie des äusseren verlängerten Tangenten.

Beweis. Es sei (Fig. 352.) $CF_q + CH_q = 2CG_q$, so soll tang. AB = tang. DE sein. Man ziehe AC und DC, so ist:

$$CF_q + CH_q = 2CG_q \text{ (V.)}$$

oder: $CF_q - CG_q = CG_q - CH_q$

oder: $AC_q - CG_q = CD_q - CH_q$

mithin: $AG_q = DH_q$ (87, Z. 2)

und daher: AG = DH.

Zieht man nun BC und CE, so ist △ACG ≅ △BGC und △DHC ≅ △EHC (49), folglich: AG = BG

DH = EH

mithin ist auch BG = EH

und daher: AB = DE, w. z. b. w.

431. Berühren sich zwei Kreise von innen, und errichtet man auf ihrer Axe, d. h. der ihre Mittelpunkte verbindenden Ge-

raden zwei oder mehrere Senkrechte so, dass jede beide Umkreise schneidet, so verhalten sich die Entfernungen dieser Durchschnittspunkte vom Berührungspunkt bei der einen Senkrechten eben so wie bei der anderen (Fig. 353.).

Beweis. Man verlängere die Axe der beiden Kreise bis zu ihrem Berührungspunkte A (262) und errichte zwei beliebige Senkrechte BC und DE auf der Axe, ziehe AB, AD, AF, AG,

so verhält sich: $AB_q : AD_q = AC : AE$ ⎫
$AF_q : AG_q = AC : AE$ ⎭ (254)

folglich: $AB_q : AD_q = AF_q : AG_q$

oder: $AB_q : AF_q = AD_q : AG_q$

und daher: $AB : AF = AD : AG$ (155, Z. 1), w. z. b. w.

432. Das Quadrat der Seite des in einen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist das Dreifache vom Quadrate des Kreishalbmessers.

Beweis. Es sei (Fig. 354.) $\triangle ABC$ gleichseitig; man fälle aus dem Mittelpunkte D des umschriebenen Kreises $DE \perp BC$ und ziehe BD, so ist: $BE_q = BD_q - DE_q$ (87, Z. 2)

$DE = \frac{1}{2} BD$ (286)

also $DE_q = \frac{1}{4} BD_q$ (74, Z. 1),

mithin: $BE_q = \frac{3}{4} BD_q$

$BE = \frac{1}{2} BC$ (248)

daher: $BE_q = \frac{1}{4} BC_q$ (74, Z. 1),

folglich $BC_q = 3 BD_q$, w. z. b. w.

433. Verbindet man einen beliebigen Punkt im Umfange des um ein gleichseitiges Dreieck beschriebenen Kreises mit den Ecken des Dreiecks, so ist eine dieser drei Geraden so gross, als die beiden andern zusammen; ($BD = AD + CD$ Fig. 355.)

Beweis. Man mache $DE = AD$ und ziehe AE, so ist:

$\angle ADB = \angle ACB$ (245) $= 60^0$ (V.)

folglich: $\angle DAE + \angle AED = 120^0$ (38)

und da $AD = DE$ (Constr.)

so ist $\angle DAE = \angle AED = 60^0$

daher $\triangle ADE$ gleichseitig (52, Z.)

Hieraus folgt $AE = AD$.

Ferner ist $AB = AC$ (V.)

und da: $\angle BAC = \angle EAD = 60^0$,

so ist auch: $\angle BAE = \angle CAD$,

folglich $\triangle BAE \cong \triangle CAD$ (45)
daher: $BE = CD$
$DE = AD$ (Constr.)

folglich $BD = AD + CD$, w. z. b. w.

434. Ist ein gleichschenkeliges Dreieck (ABC Fig. 355.) in einen Kreis beschrieben, und verbindet man einen beliebigen Punkt (D) des zu einem der Schenkel gehörigen Bogens mit den Ecken des Dreiecks, so ist dasselbe gleichseitig, wenn eine dieser Verbindenden so gross, als die beiden andern zusammen genommen ist ($BD = AD + CD$).

Beweis. Man mache $DE = AD$, alsdann ist:

$BE = CD$
$AB = AC$ (V.)
$\angle ABE = \angle ACD$ (244, Z. 1)

folglich: $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ (45)
daher: $AE = AD = DE$,
also $\triangle AED$ gleichseitig,
folglich: $\angle ADE = 60^0 = \angle ACB$ (244, Z. 1),
mithin $\triangle ABC$ gleichseitig, w. z. h. w.

Anmerkung. Dieser Satz ist eine Umkehrung des vorhergehenden.

435. Zieht man von einem der Durchschnittspunkte zweier sich schneidenden Kreise aus in jedem derselben einen Durchmesser, so liegen die nicht gemeinschaftlichen Endpunkte derselben in gerader Linie mit dem andern Durchschnittspunkte.

Beweis. Zieht man (Fig. 356.) von einem der Durchschnittspunkte, A, der Kreise C und D, aus in jedem einen Durchmesser, AE und AF, und verbindet die Endpunkte E und F derselben mit dem zweiten Durchschnittspunkte B der Kreise durch die Geraden EB und BF, so ist zu erweisen, dass diese beiden Linien eine einzige Gerade ausmachen. Man ziehe AB, so ist:

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABF = R\\ \angle ABE = R\end{array}\right\} (246)$$

folglich: $\angle ABF + \angle ABE = 2R$,
mithin: EBF eine gerade Linie (21), w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung des 262. im fünften Buche insofern angesehen werden, als die gemeinschaftliche Sehne AB, wenn die beiden Kreise C und D sich nur berühren, gleich Null wird, die Punkte A und B aber mit dem auf der Axe liegenden Berührungspunkte und daher die Durchmesser AE und AF mit der Geraden EF zusammenfallen.

436. Der geometrische Ort für die Halbirungspunkte aller einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt habenden Sehnen ist die Peripherie des Kreises, welchen man über der zwischen dem genannten Durchschnittspunkte und dem Mittelpunkte des Urkreises enthaltenen Linie als Durchmesser beschreibt. (Fig. 357.)

Beweis. Es mögen sich die Sehnen AB und CD des Kreises F im Punkte E schneiden; zieht man EF, beschreibt über EF als Durchmesser den Kreis G und verbindet dessen Durchschnitte mit den Sehnen mit dem Mittelpunkte des Urkreises durch die Geraden HF und JF, so ist $\angle FHE = R = \angle FJE$ (246), also $HF \perp AB$ und $FJ \perp CD$, daher ist H der Halbirungspunkt der Sehne AB und J der Halbirungspunkt von CD (248); die genannten Punkte liegen aber auf der Peripherie des Kreises G; derselbe Beweis gilt für jede andere durch den Punkt E gehende Sehne des Kreises F; es ist also die Peripherie des Kreises G der geometrische Ort für die Halbirungspunkte aller in E sich schneidenden Sehnen des Kreises F, w. z. b. w.

437. Schneidet man auf der Sehne (AB Fig. 358.) eines beliebigen Bogens von ihren Endpunkten aus zwei beliebige, aber gleiche Stücke (AD, BE) ab, und errichtet in diesen Durchschnittspunkten Senkrechte, die man bis zum Durchschnitte mit dem Umkreise verlängert, so sind diese (DM, EN) von gleicher Länge.

Beweis. Man ziehe mit AB einen parallelen Durchmesser, verlängere DM und EN, bis sie denselben in L und O schneiden, und fälle aus dem Mittelpunkte C die Senkrechte CK auf AB, so ist:

ist:	$AK = BK$ (248)
	$AD = BE$ (V.)
folglich	$DK = EK$
	$\left.\begin{array}{l} DK = CL \\ EK = CO \end{array}\right\}$ (56)
mithin	$CL = CO$
folglich	$ML = NO$ (250, Z. 2)
	$DL = EO$ (56),
mithin	$DM = EN$, w. z. b. w.

438. Sind die von zwei Punkten (M, N Fig. 358.) einer Kreisperipherie auf eine Sehne gefällten Senkrechten (DM, EN) von

gleicher Länge, so sind die von ihnen auf der Sehne von deren Endpunkten aus abgeschnittenen Stücke (AD, BE) ebenfalls von gleicher Länge.

Beweis. Man ziehe mit der Sehne AB einen parallelen Durchmesser, verlängere DM und EN, bis sie denselben in L und O schneiden, fälle CK $\perp$ AB und ziehe die Radien CM nnd CN, so ist:

so ist:	DM = EN (V.)
	DL = EO (56)
also:	LM = NO
	CM = CN
	$\angle$CLM = $\angle$CON = R
mithin	$\triangle$CLM = $\triangle$CNO (49),
daher	CL = CO.
Es ist aber:	CL = DK, CO = EK (56)
folglich	DK = EK
	AK = BK (248),
mithin	AD = BE, w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz ist die Umkehrung des vorhergehenden.

439. Schneiden sich zwei beliebige Sehnen eines Kreises rechtwinkelig, so ist von den vier Bogen, in die sie den Umkreis theilen, die Summe zweier gegenüberliegender gleich der Summe der beiden andern.

Beweis. Es mögen sich AB und CD (Fig. 359.) unter rechten Winkeln schneiden; man ziehe den Durchmesser EF $\parallel$ AB, den Durchmesser GH $\parallel$ CD, so schneiden sich diese beiden Durchmesser ebenfalls unter rechten Winkeln (A. 19, Z.), folglich ist, wenn man den Umkreis mit U bezeichnet:

$$\left.\begin{array}{r}\text{arc. GE} = \tfrac{1}{4}\text{U} \\ \text{arc. CH} + \text{arc. BC} + \text{arc. BF} = \tfrac{1}{4}\text{U}\end{array}\right\} (245,\ Z.\ 3)$$

mithin: arc. GE + arc. CH + arc. BF + arc. BC = $\tfrac{1}{2}$U

$$\left.\begin{array}{r}\text{arc. CH} = \text{arc. GD} \\ \text{arc. BF} = \text{arc. AE}\end{array}\right\} (245,\ Z. 4)$$

folglich arc. GE + arc. GD + arc. AE + arc. BC = $\tfrac{1}{2}$U

oder: arc. AD + arc. BC = $\tfrac{1}{2}$U,

mithin ist auch: arc. AC + arc. BD = $\tfrac{1}{2}$U = arc. AD + arc. BC, w. z. b. w.

440. Der Winkel, welchen zwei von einem Punkte ausserhalb nach einem Kreise gezogene Schneidende mit einander bilden, ist gleich einem Peripheriewinkel, dessen zugehöriger Bogen gleich dem Unterschiede der beiden zwischen den genannten Geraden enthaltenen Bogen ist.

Beweis. Es seien AB und BC (Fig. 360.) die Schneidenden; man ziehe durch D: DE ∥ AB, so ist:

arc. DF = arc. AE (245, Z. 4)
= arc. AC — arc. CE,
oder: arc. CE = arc. AC — arc. DF
und: ∠EDC = ∠ABC (24), w. z. b. w.

Zusatz 1. Der Satz behält seine Richtigkeit auch dann, wenn eine der in Rede stehenden Geraden oder beide aus Schneidenden sich in Berührende verwandeln.

Beweis. Ist AB (Fig. 361.) eine Schneidende, BC eine Tangente, und zieht man den Radius CD nach dem Berührungspunkte und durch F: FE ∥ BC, so ist CD ⊥ BC (243), folglich auch FE ⊥ CD, mithin arc. CF = arc. CE

daher ist: arc. AE = arc. AC — arc. CE
= arc. AC — arc. CF
und ∠AFE = ∠ABC (24.)

Wenn ferner BH und BC zwei Tangenten sind, und man zieht die Halbmesser DH und DC nach den Berührungspunkten und von einem beliebigen Punkte F des Bogens CH mit jeder Tangente eine parallele Sehne, also FJ ∥ BH und FE ∥ BC, so ist aus ähnlichen Gründen, wie vorher:

arc. HJ = arc. FH
arc. CE = arc. FC, folglich:

arc. HJ + arc. CE = arc. CH
und mithin: arc. EJ = arc. HJEC — arc. HJ — arc. CE
= arc. HJEC — arc. CH
und: ∠JFE = ∠HBC (A. 4).

Zusatz 2. Wenn die Geraden nicht ausserhalb, sondern innerhalb des Kreises sich schneiden, so ist der von ihnen gebildete Winkel gleich einem Peripheriewinkel, dessen zugehöriger Bogen gleich der Summe der beiden Bogen ist, welche zwischen jenen Geraden und den zwischen ihren über ihren Durchschnittspunkt bis zum Umkreise hinausgehenden Verlängerungen enthalten sind.

Beweis. Verlängert man (Fig. 362.) die in B sich schneidenden Geraden AB und BC über B bis zum Umkreise und zieht DF ∥ AE, so ist arc. AF = arc. DE (245, Z. 4),

also arc. FC = arc. AC + arc. AF

= arc. AC + arc. DE

und ∠FDC = ∠ABC (24), w. z. b. w.

Zusatz 3. Die beiden letzten Sätze (439 und 440) lassen sich in einen einzigen allgemeineren Satz zusammenfassen, nämlich: „Zieht man von einem Punkte in der Ebene eines Kreises zwei beliebige Schneidende nach demselben und verlängert sie, bis sie dem Umkreise zum zweiten Male begegnen, so ist von den vier Bogen, in welche letzterer getheilt wird, die algebraische Summe zweier gegenüberliegender kleiner, eben so gross oder grösser als die Summe der beiden andern, jenachdem der Winkel, unter welchem die Schneidenden gezogen worden, kleiner, eben so gross oder grösser als ein Rechter ist."

441. Hat man mehrere gleiche Kreisbogen und auch einen von ihnen an Grösse verschiedenen, und verbindet die Endpunkte eines jeden der ersteren mit den Endpunkten des letzteren so, dass alle diese Paare zusammengehöriger Linien zugleich innerhalb oder ausserhalb des Kreises sich schneiden, so sind die Winkel, unter denen dieser Durchschnitt erfolgt, von gleicher Grösse.

Beweis. Es sei (Fig. 363.) arc. AB = arc. CD < arc. EF, so soll sein 1) ∠EGF = ∠EHF,

2) ∠EJF = ∠EKF.

Es ist ∠EGF gleich einem Peripheriewinkel, dessen zugehöriger Bogen = arc. EF — arc. AB (A. 440),

∠EHF gleich einem Peripheriewinkel, dessen zugehöriger Bogen = arc. EF — arc. CD (A. 440).

Da nun arc. AB = arc. CD (Vorauss.),

so ist auch arc. EF — arc. AB = arc. EF — arc. CD,

mithin sind die zu diesen Bögen gehörigen Peripheriewinkel gleich (245), und daher 1). ∠EGF = ∠EHF.

Ferner ist ∠EJF gleich einem Pheripheriewinkel, dessen zugehöriger Bogen = arc. EF + arc. AB (A. 440, Z. 2),

∠EKF gleich einem Perripheriewinkel, dessen zugehöriger Bogen = arc. EF + arc. CD (A. 440, Z. 2).

Hieraus folgt nun aus ähnlichen Gründen wie vorher

2) ∠EJF = ∠EKF, w. z. b. w.

442. Der Durchschnittspunkt jeder Winkelhalbirenden eines Dreiecks mit der im Halbirungspunkte der Gegenseite des halbirten Winkels errichteten Senkrechten liegt im Umfange des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

Beweis. Es sei Kreis D um △ABC beschrieben (Fig. 364). Man fälle aus dem Mittelpunkte DE ⊥ BC und verlängere sie bis zum Umkreise, ziehe AF, so ist

$$\left.\begin{array}{r} BE = CE \\ \text{arc. } BF = \text{arc. } CF \end{array}\right\} (248),$$

folglich $\angle BAF = \angle CAF$ (245).

Die Winkelhalbirende AF und die im Halbirungspunkte E der Gegenseite BC des halbirten Winkels errichtete Senkrechte EF schneiden sich also auf der Peripherie des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, w. z. b. w.

443. Nimmt man zwei Punkte, den einen (B, Fig. 365.) auf einem Kreishalbmesser (CA) selbst, den andern (D) auf dessen Verlängerung so, dass der Radius selbst die mittlere Proportionale zwischen den beiden durch die genannten Punkte bestimmten Linien (CB, CD), errichtet in dem ersteren Punkte (B) eine Senkrechte, die man bis zum Durchschnitt mit dem Umkreis verlängert, und verbindet endlich diesen Durchschnittspunkt (F) mit dem zweiten jener Punkte, so ist diese Gerade eine Tangente.

Beweis. Man ziehe den Halbmesser CF, so ist

$$CB : CA = CA : CD \text{ (Vorauss.)}$$
$$CA = CF \text{ als Radien,}$$

also $CB : CF = CF : CD$

$\angle BCF = \angle DCF$,

folglich $\triangle BCF \sim \triangle DCF$ (198),

mithin $\angle CBF = R = \angle CFD$

und daher DF eine Tangente (243), w. z. b. w.

444. Der vorstehende Satz lässt sich zweimal umkehren.

Erste Umkehrung. Nimmt man zwei Punkte, den einen (B, Fig. 365.) auf einem Kreishalbmesser (CA) selbst, den andern (D) auf dessen Verlängerung so, dass der Radius selbst die mittlere Proportionale zwischen den beiden durch die genannten Punkte bestimmten Linien (CB, CD) ist, zieht von dem zweiten Punkte (D) eine Tangente (DF) an den Kreis

und verbindet den Berührungspunkt (F) mit dem ersten (B) jener Punkte, so steht diese Verbindende (BF) senkrecht auf dem Radius.

Beweis. Man ziehe CE, so ist

$CB : CA = CA : CD$ (Vorauss.)

oder $CB : CF = CF : CD$

$\angle BCF = \angle DCF$,

folglich $\triangle FBC \sim \triangle FDC$ (198),

mithin $\angle FBC = \angle CFD$

$= R$ (243),

daher $BF \perp CD$ (20), w. z. b. w.

Zweite Umkehrung. Verbindet man einen Punkt (D, Fig. 365.) ausserhalb eines Kreises mit dessen Mittelpunkte (C) durch eine Gerade (DC), zieht darauf von eben jenem Punkte aus eine Tangente (DF) an den Kreis, fällt endlich von dem Berührungspunkte (F) die Senkrechte (FB) auf die Verbindende CD, so ist der Radius die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Verbindenden (CD) und dem Stück (BC) von ihr, welches zwischen dem Fusspunkte des Perpendikels und dem Mittelpunkte des Kreises enthalten ist.

Beweis. Man ziehe den Radius CF, so ist

$\angle FBC = R$ (Constr.)

$= \angle CFD$ (243),

folglich $CB : CF = CF : CD$ (209, Z. 2), w. z. b. w.

445. Beschreibt man zwei gleiche Kreise so, dass jeder durch den Mittelpunkt des andern geht, und zieht in einem derselben eine beliebige Menge von Sehnen parallel mit der Axe (A. 431) beider Kreise, so wird jede derselben durch die Peripherie des andern Kreises in zwei Segmente getheilt, von denen das eine gleich dem Kreishalbmesser ist.

Beweis. Es sei (Fig. 366.) in den gleichen Kreisen A und B die Axe $AB \parallel CE$, einer Sehne; ziehe die Radien BC, AE, BF, so ist

$AB \parallel CE$ (Vorauss.)

$AE = BC$,

daher ABCE ein Antiparallelogramm (A. 37),

folglich $\angle AEC = \angle BCE$ (A. 38)

$= \angle BFC$ (51),

mithin $AE \parallel BF$ (24),

also ABFE ein Parallelogramm (55),
mithin EF = AB (56), w. z. b. w.

Aehnlich ist der Beweis, dass CD = AB, so wie für alle anderen, der Axe parallelen Sehnen.

446. Wenn man in ein rechtwinkeliges Dreieck einen Halbkreis so beschreibt, dass er die Hypotenuse und eine Kathete berührt, sein Durchmesser aber in die Richtung der andern Kathete (AC, Fig. 367.) fällt, wenn man ferner die erste Kathete über die Hypotenuse hinaus um ihre eigene Länge verlängert, so liegt der Endpunkt dieser Verlängerung, der Berührungspunkt auf der Hypotenuse und der eine Endpunkt des Durchmessers in gerader Linie.

Beweis. Es berühre Kreis G in A die eine Kathete AB des in A rechtwinkeligen Dreiecks ABC und in E dessen Hypotenuse; es sei ferner AB = BD und AF der auf der andern Kathete AC liegende Durchmesser des Kreises G, so sollen die Punkte D, E, F in gerader Linie liegen. Man ziehe DE, EF, AE, GE,
so ist AB = BE als Tangenten (259, Z. 2)
AB = BD (Constr.),
mithin BE = $\frac{1}{2}$AD,
folglich $\angle$AED = R (A. 61, Z. 2)
$\angle$AEF = R (246),
also $\angle$AED + $\angle$AEF = 2R,
folglich DEF eine einzige gerade Linie (21), w. z. b. w.

447. Wenn man auf der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks von einem ihrer Endpunkte aus ein Stück abschneidet gleich der an eben diesem Endpunkte anliegenden Kathete, darauf diese letztere über die Hypotenuse hinaus um ihre eigene Länge verlängert, den Endpunkt der Verlängerung mit dem Endpunkte des auf der Hypotenuse abgeschnittenen Stückes durch eine gerade Linie verbindet, diese Verbindende bis zum Durchschnitt mit der anderen Kathete verlängert und endlich über demjenigen der beiden so erhaltenen Segmente dieser letzteren Kathete, welches zwischen der Spitze des rechten Winkels und dem Durchschnittspunkte enthalten ist, als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so berührt derselbe sowohl die erste Kathete, als auch die Hypotenuse.

Beweis. Es sei (Fig. 367.) BE = AB = BD = $\frac{1}{2}$AD und $\angle$BAC = R, so ist BA eine Tangente (243). Man verbinde den

Mittelpunkt G mit dem Durchschnittspunkte E durch die Gerade GE, ziehe AE, so ist

$\angle AED = R$ (A. 61, Z. 2),

folglich $\angle AEF = R$ (20)

AG = GF als Radien,

mithin GE = AG (A. 61) = dem Radius des Kreises G; es muss also dieser Kreis durch den Punkt E gehen.

Ferner ist $\left.\begin{array}{l}\angle GEA = \angle GAE \\ \angle BEA = \angle BAE\end{array}\right\}$ (51),

also auch $\angle GEA + \angle BEA = \angle GAE + \angle BAE$

oder $\angle BEG = \angle BAC = R$ (Vorauss.),

folglich ist BE eine Tangente (242); es berührt also Kreis G die Kathete AB in A und die Hypotenuse BC in E, w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz ist die Umkehrung des vorhergehenden.

448. Zieht man von einem beliebigen Punkte ausserhalb eines Kreises zwei Tangenten an denselben und fällt auf die eine ein Perpendikel aus dem Berührungspunkte der andern, so ist das Stück desselben, zwischen dem Berührungspunkte und der Geraden, welche den genannten Punkt ausserhalb mit dem Mittelpunkte verbindet, gleich dem Kreishalbmesser.

Beweis. Es seien (Fig. 368.) AB und AC Tangenten des Kreises E; $BD \perp AC$, so soll BF = BE sein; man ziehe CE, so ist

AB = AC (250, Z. 4)

BE = CE als Radien

AE = AE,

mithin $\triangle ABE \cong \triangle ACE$ (50),

daher 1) $\angle AEB = \angle AEC$.

Ferner ist $\angle ACE = R$ (243)

$\angle ADB = R$ (Constr.),

also $\left.\begin{array}{l}\angle AEC + \angle EAC = R \\ \quad = \angle EAC + \angle EAB + \angle ABD\end{array}\right\}$ (38),

folglich auch $\angle AEC = \angle EAB + \angle ABD$

$= \angle BFE$ (38)

$\angle AEC = \angle AEB$ (nach 1) oder $\angle FEB$,

mithin $\angle BFE = \angle FEB$

und daher BF = BE (52), w. z. b. w.

Anmerkung. Der Durchschnittspunkt der Senkrechten mit der Geraden, welche von dem Punkte ausserhalb nach dem Mittelpunkte gezogen wird, liegt auf

der Peripherie des Kreises, wenn jene Gerade gleich dem Kreisdurchmesser, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn der zwischen den beiden Tangenten enthaltene Bogen gleich dem dritten Theile der Kreisperipherie ist.

Beweis a. Es sei (Fig. 369.) AE = dem Kreisdurchmesser; man ziehe BF und verlängere diese Gerade, bis sie AC in D schneidet, so ist zu zeigen, dass BD $\perp$ AC.

$\angle$ ABE = R (243)
AF = FF (Vorauss.),
folglich 1) BF = $\frac{1}{2}$AE (A. 61)
= BE,
daher $\angle$ BEF = $\angle$ BFE (51)
= $\angle$ AFD (22)
$\angle$ BEF = $\angle$ AEC, weil $\triangle$ABE$\cong\triangle$ACE (50),
mithin auch $\angle$ ACE = $\angle$ AFD
$\angle$ AEC + $\angle$ EAC = R (38),
folglich $\angle$ AFD + $\angle$ EAC = R,
daher $\angle$ ADB = R (38),
also BD $\perp$ AC, w. z. b. w.

Beweis b. Ist der Bogen BC gleich dem dritten Theile der ganzen Peripherie, so ist
$\angle$ BEC = 120° (245 und 22, Z.),
also $\angle$ BEF = 60°;
hieraus folgt, dass $\triangle$ BFE gleichseitig,
daher BF = BE;
dass ferner BD $\perp$ AC, wird wie vorhin erwiesen.

449. Sind zwei Kreise concentrisch, und ist der Halbmesser des einen doppelt so gross als der des andern, so ist der Winkel, welchen Tangenten bilden, welche man von einem beliebigen Punkte des äussern Kreises an den innern zieht, gleich dem Winkel im gleichseitigen Dreieck.

Beweis. Es sei (Fig. 370.) BC = $\frac{1}{2}$AC; man ziehe die Radien CD und CE nach den Berührungspunkten der Tangenten AD und AE, so ist $\angle$ ADC = R (243),
also auch 1) $\angle$ ACD + $\angle$ CAD = R (38).
Da ferner CD = $\frac{1}{2}$AC (Vorauss.),
so ist $\angle$ ACD = 2 $\angle$ CAD (A. 60, Z. 1).
Aus 1 hat man daher $\angle$ CAD = 30°,
eben so $\angle$ CAE = 30°,
folglich $\angle$ CAD + $\angle$ CAE = $\angle$ DAE = 60°, w. z. b. w.

450. Sind zwei Kreise concentrisch, und ist der Winkel, welchen Tangenten bilden, die man von einem beliebigen Punkte des äussern Kreises an den innern zieht, gleich 60^0, so ist der Halbmesser des innern Kreises halb so gross als der des äussern.

Beweis. Es sei (Fig. 370.)

$\angle DAE = 60^0$, so ist

$\angle DAC = 30^0$, weil $\triangle DAC \cong \triangle EAC$ (50), also $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle DAE$, folglich

$\angle ACD = 60^0$,

$= 2\angle DAC$, weil $\angle ADC = R$ (243), also $\angle DAC + \angle DCA = R$

mithin [(38),

$CD = \frac{1}{2}AC$ (A. 60), w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz ist die Umkehrung des vorhergehenden.

450a. Der geometrische Ort für die Durchschnittspunkte aller derjenigen Tangentenpaare, welche sich an einen gegebenen Kreis unter der Bedingung ziehen lassen, dass sie alle einen Winkel von vorgeschriebener Grösse bilden, ist der Umfang eines mit dem gegebenen concentrischen Kreises.

Beweis. Es sei (Fig. 370.) $\angle DAE = \angle GFH$, der Winkel von vorgeschriebener Grösse, welchen die Tangentenpaare AD und AE, FG und FH bilden; man ziehe AC und beschreibe aus C als Mittelpunkt mit AC als Halbmesser einen Kreis, so ist zu beweisen, dass die Kreislinie durch die Spitze F des Winkels GFH gehe. Man ziehe CF und die Radien des innern Kreises nach den vier Berührungspunkten der Tangenten, so ist

$$\left.\begin{array}{l}\triangle DAC \cong \triangle CAE \\ \triangle GFC \cong \triangle CFH\end{array}\right\} (50),$$

folglich

$$\angle DAC = \angle CAE = \tfrac{1}{2}\angle DAE = \tfrac{1}{2}\angle GFH \text{ (Vorauss.)} = \angle GFC$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle ADC = R \\ \quad = \angle CGF\end{array}\right\} (243)$$

$$CD = CG,$$

mithin $\triangle ADC \cong \triangle CGF$ (46),

daher $AC = CF$.

Es ist aber AC der Radius des äussern Kreises; folglich muss auch CF ein solcher Radius sein, also der Punkt F in der Peripherie

liegen. Ein gleicher Beweis gilt auch für alle übrigen Tangentenpaare, welche den Winkel von der vorgeschriebenen Grösse bilden, w. z. b. w.

450b. Wenn man zwei Punkte ausserhalb eines Kreises so nimmt, dass die von ihnen aus an den Kreis gezogenen Tangentenpaare Winkel bilden, die sich supplementiren, so ist der Kreishalbmesser die mittlere Proportionale zwischen diesen Tangenten, d. h. den Stücken derselben, welche zwischen dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte und dem Berührungspunkte enthalten sind.

Beweis. Es seien (Fig. 371.) AB und AC, DE und DF zwei Tangentenpaare des Kreises G und die von ihnen gebildeten Winkel: $\angle BAC + \angle EDF = 2R$; man ziehe AG, GD und Radien nach den vier Berührungspunkten der Tangenten, so ist

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABG \cong \triangle ACG \\ \triangle DEG \cong \triangle DFG\end{array}\right\} (50),$$

daher $\angle CAG = \angle GAB = \frac{1}{2}\angle BAC$

und $\angle GDF = \angle GDE = \frac{1}{2}\angle EDF$,

also $\angle CAG + \angle GDF = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle EDF)$

$= R$ (Vorauss.)

$= \angle GDF + \angle DGF$ (243 n. 38),

mithin $\angle CAG = \angle DGF$

$\angle ACG = \angle GFD = R$,

folglich auch $\angle AGC = \angle GDF$ (38),

mithin $\triangle ACG \sim \triangle GFD$ (196),

daher $AC : GC = GF : DF$

$GC = GF$ als Radien,

also $AC : GC = GC : DF$, w. z. b. w.

Anmerkung. Wenn die Tangenten sich unter rechten Winkeln schneiden, so wird jede derselben gleich dem Radius; denn aus den beiden Vierecken ACGB und DEGF werden einander gleiche Quadrate (59), da

$$\begin{aligned} GC = BG &= GF \\ = AC\ (56) &= DE \\ = AB &= DF \end{aligned}$$

und alle Winkel Rechte sind.

450c. Wenn man von zwei Punkten ausserhalb eines Kreises zwei Tangentenpaare an denselben zieht, und der Kreishalbmesser die mittlere Proportionale zwischen diesen Tangenten ist, so bilden dieselben zwei Winkel, welche sich supplementiren.

Beweis. (Fig. 371.) $AC : GC = GF : DF$ (Voraus.)

$\angle ACG = \angle GFD = R$ (243),

folglich $\triangle ACG \sim \triangle GFD$ (198),

mithin $\angle GAC = \angle DGF$

$\angle GDF = \angle AGC$,

also auch $\angle GAC + \angle GDF = \angle DGF + \angle AGC$, aber

$\angle GAC + \angle GDF + \angle DGF + \angle AGC = 2R$ (243 und 38),

folglich $\angle GAC + \angle GDF = R$

$\angle GAC + \angle GDF = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle EDF)$,

weil $\triangle GAC \cong \triangle BAG$, $\triangle GDF \cong \triangle GED$ (50),

mithin $\angle BAC + \angle EDF = 2R$, w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz ist die Umkehrung des vorhergehenden.

451. Wenn man von einem der Endpunkte (A, Fig. 372.) der gemeinschaftlichen Sehne zwei gleicher sich schneidender Kreise einen beliebigen dritten beschreibt, welcher die beiden erstern schneidet, so liegen von den vier Durchschnittspunkten zwei Paare solcher, die zu verschiedenen Kreisen gehören (D und E, so wie F und G), mit dem andern Endpunkte der gemeinschaftlichen Sehne in gerader Linie.

Beweis. Man ziehe DE und BE, so wie FG und BG, so ist zu beweisen, dass $\angle AED + \angle AEB = 2R = \angle AGF + \angle AGB$; alsdann müssen DEB und BGF gerade Linien sein (21). Man ziehe noch AD, AG, AE, so ist

$AE = AG$ als Radien des Kreises A,

mithin, da diese Radien zugleich Sehnen der gleichen Kreise C und H,

arc. AE = arc. AG (245, Z. 5),

folglich $\angle EBA = \angle ABG$ (245).

Da ferner $AG = AD$ als Radien des Kreises A und diese Radien Sehnen des Kreises C sind, so ist

arc. AG = arc. AD (245, Z. 5)

$= \frac{1}{2}$ arc. DAG,

folglich $\angle ABG = \frac{1}{2}$ des Peripheriewinkels, welcher auf arc. DAG

oder, da $\angle ABG = \angle EBA$ war; [steht (245, Z. 1),

1) $2\angle EBA$ = einem Peripheriewinkel, der auf arc. DAG steht.

Da ferner die gleichen Kreise C und H die Sehne AB gemeinschaftlich haben, so ist arc. AEB = arc. AGB, also auch

arc. AEB — arc. AE = arc. AGB — arc. AG

oder arc. BE = arc. BG,

mithin $\angle EAB = \angle BAG$ oder = einem Peripheriewinkel des

Kreises C, welcher auf arc. BG steht; hieraus und aus 1 hat man daher

2) $2\angle EBA + \angle EAB =$ einem Peripheriewinkel des Kreises C, welcher auf arc. DAGB steht. Nun ist aber

arc. DAGB + arc. DKB = dem Umkreise

und $\angle DAB$ steht auf arc. DKB; folglich hieraus und 2

3) $2\angle EBA + \angle EAB + \angle DAB$

oder $2\angle EBA + 2\angle EAB + \angle DAE = 2R$ (244, Z. 3),

aber $\angle EBA + \angle EAB + \angle AEB = 2R$ (38),

folglich $\angle EBA + \angle EAB + \angle DAE = \angle AEB$

$AD = AE$,

daher $\angle ADE = \angle AED$ (51),

mithin $\angle EBA + \angle EAB + \angle DAE + \angle ADE = \angle AEB + \angle AED$.

Diese sechs Winkel betragen zusammengenommen 4R, da sie die Winkel der beiden Dreiecke AEB und ADE sind (38), folglich: $\angle AEB + \angle AED = 2R$; die Punkte D, E und B liegen mithin in gerader Linie. Ein ähnlicher Beweis gilt für die Punkte B, G und F; w. z. b. w.

Zusatz. Berührt der dritte Kreis A (Fig. 373.) die beiden andern Kreise von innen, so liegen die Berührungspunkte mit dem andern Endpunkte B der gemeinschaftlichen Sehne in gerader Linie.

Beweis. Es müssen die Axen AC und AH, hinreichend verlängert, die Berührungspunkte D und F treffen (262); man ziehe BD und BF, so ist arc. ABF = dem halben Umkreise,

folglich $\angle ABF = R$

ebenso $\angle ABD = R$ } (246),

daher $\angle ABF + \angle ABD = 2R$,

folglich DBF eine einzige gerade Linie (21); w. z. b. w.

Anmerkung 1. Unser Satz bleibt also auch noch richtig, wenn der dritte Kreis die beiden andern von innen berührt; es werden nämlich alsdann die Durchschnittspunkte D und F in Fig. 372 die Berührungspunkte D und F in Fig. 373, und die Durchschnittspunkte E und G in Fig. 372 fallen in Fig. 373 mit dem andern Endpunkte B der gemeinschaftlichen Sehne zusammen.

Anmerkung 2. Aus dem Beweise des Zusatzes, verbunden mit Satz 49, Z., folgt unmittelbar, dass die Gerade DF, welche die Berührungspunkte verbindet, durch die gemeinschaftliche Sehne AB unter rechten Winkeln halbirt wird.

452. Die Peripherie des über der gemeinschaftlichen Sehne (AB, Fig. 374.) zwei gleicher sich schneidender Kreise als Durchmesser beschriebenen Kreises ist der geometrische Ort für die Halbirungspunkte aller Geraden (wie DAE), welche durch einen der End-

punkte der gemeinschaftlichen Sehne gezogen und durch die beiderseitigen Umkreise begrenzt werden.

Beweis. Man ziehe BH, BD, BE, so ist:

arc. ALB = arc. AKB als zu derselben Sehne gleicher Kreise gehörig; folglich auch:

$\angle ADB = \angle AEB$ (245)

oder $\angle EDB = \angle DEB$

mithin: BD = BE (52)

und da: $\angle AHB$ oder $\angle DHB = R$ (246)

$= \angle BHE$ (20)

so ist: BH ⊥ DE

folglich: DH = HE (51, Z. 4), w. z. b. w.

453. Wenn man von dem Halbirungspunkte (C Fig. 375.) der Axe (AB) zweier sich von aussen berührender Kreise mit einem beliebigen Radius einen dritten Kreis beschreibt, und in demselben eine beliebige Sehne (GM) zieht, welche durch den Berührungspunkt (K) geht, so sind die Stücke derselben (GH, ML), welche zwischen den Endpunkten und den Peripherieen der beiden erstern Kreise enthalten sind, von gleicher Länge.

Beweis. Man fälle CE ⊥ GM, ziehe AH und BL, so ist: $\angle AHK = \angle BLK = R$ (246), also AH und BL ⊥ GM, folglich:

AH ∥ CE ∥ BL (26, Z.)

mithin: $\angle HAK = \angle ECK = \angle LBK$ (25)

daher $\triangle AHK \sim \triangle ECK \sim \triangle LBK$ (196)

und es verhält sich:

AC : HE = AK : HK (195)

1) = BK : LK.

Ferner: BK : CK = LK : EK,

also auch: BK+CK : BK = LK + EK : LK (153)

d. i. BC : BK = LE : LK

oder: BC : LE = BK : LK (151)

= AC : HE (aus 1)

BC = AC (Constr.)

folglich: LE = HE (149)

ME = GE (248), weil CE ⊥ GM (Constr.),

mithin ME — LE = GE — HE,

d. i. ML = GH, w. z. b. w.

454. Zieht man durch einen der Scheitel (A, B Fig. 376.) eines Kreisdurchmessers beliebige Sehnen und verlängert sie bis

zum Durchschnitt mit einer Geraden (JO), welche den verlängerten Durchmesser unter rechten Winkeln schneidet, so sind die Rechtecke, die man aus den einzelnen Sehnen und denjenigen ihrer Segmente bildet, welche zwischen dem Scheitel und der genannten Senkrechten enthalten sind, gleichflächig. (AH . AJ = AL . AM und BE . BF = BG . BD).

Beweis. Man ziehe BH und BL, so ist:

$\angle AHB = R$ (246)

$= \angle AKJ$ (Constr.)

$\angle HAB = \angle KAJ$,

also auch: $\angle ABH = \angle AJK$ (38, Z. 2),

folglich: $\triangle AHB \sim \triangle AKJ$ (196)

daher: $AH : AB = AK : AJ$,

mithin: $AH . AJ = AB . AK$ (203, Z. 3).

Ganz ähnlich ist der Beweis, dass:

$AL . AM = AB . AK$

folglich: $AH . AJ = AL . AM$.

Man ziehe ferner AE und AG, so ist aus gleichen Gründen, wie oben: $\triangle ABE \sim \triangle BFK$

und $\triangle ABG \sim \triangle BDK$,

daher: $BE : AB = BK : BF$

folglich $BE . BF = AB . BK$

ebenso ist: $BG . BD = AB . BK$,

daher: $BE . BF = BG . BD$, w. z. b. w.

455. Wenn man in einem von zwei sich schneidenden Kreisen von den Durchschnittspunkten aus zwei Paare Sehnen (AG, BF nnd AJ, BH Fig. 377.) zieht, die sich auf der Peripherie des andern Kreises schneiden (in D und E), so sind die andern Endpunkte (F, G nnd H, J) beider Paare gleich weit von einander entfernt.

Beweis. Es ist: $\angle DAE = \angle DBE$ (245), da beide Winkel auf demselben Bogen DE stehen. Da aber $\angle DAE$ derselbe Winkel wie GAJ und DBE wie FBH ist, so ist auch:

arc. GJ = arc. HF (245),

hierzu addirt: arc. GH = arc. GH

gibt: arc. HJ = arc. GF,

mithin chord. HJ = chord. GF (245, Z. 5), w. z. b. w.

456. Theilt man die Sehne eines beliebigen Kreisbogens in drei gleiche Theile und errichtet in diesen Theilpunkten Senk-

rechte, die man bis zum Durchschnitt mit dem Bogen verlängert, so ist das mittlere der drei so entstandenen Bogenstücke kleiner, als jedes der beiden äusseren.

Beweis. Es sei (Fig. 378.) $AC = CD = DB = \frac{1}{3}AB$, EC und $DF \perp AB$, so ist: $EC = DF$ (A. 437).
Man ziehe noch AE und EF, so ist:

$EC \parallel DF$ (26, Z.)

folglich: ECDF ein Parallelogramm (54),
mithin: $EF = CD$ (56)
$= AC$ (V.)
$< AE$ (41),
folglich: arc. $EF <$ arc. AE (245, Z. 6). Ganz ähnlich ist der Beweis, dass auch:

arc. $EF <$ arc. BF, w. z. b. w.

457. Zieht man dagegen durch die Punkte der Sehne, in denen sie in drei gleiche Theile getheilt wird, zwei Radien, so wird durch sie der Bogen in drei Stücke getheilt, von denen das mittlere grösser ist, als jedes der beiden äusseren.

Beweis. Es sei (Fig. 378.) $AC = CD = DB = \frac{1}{3}AB$, OK und OH die durch die Theilpunkte C und D gehenden Radien. Man ziehe noch den Radius OA, mache $OG = OC$ und ziehe CG, so ist:

so ist: $\angle GCO = \angle CGO$ (51)
daher $\angle CGO < R$ (38, Z. 4)
mithin $\angle AGC > R$ (20)
$> \angle CAG$ (38, Z. 4)
folglich: $CG < AC$ (47)
$< CD$ (V.)
$GO = CO = DO$ (45);
denn fällt man $OL \perp AB$, so ist $AL = BL$ (248)
$AC = DB$ (V.)
also $CL = DL$
und $\triangle CLD \cong \triangle DLO$ (45);
mithin $\angle COD > \angle COG$ (17, Anmk.)
oder: $\angle KOH > \angle AOK$,
folglich: arc. $KH >$ arc. AK (245, Z. 2).
Auf ähnliche Weise zeigt man, dass auch:

arc. $KH >$ arc. BH; w. z. b. w.

458. Wird ein Kreis von einem andern, der durch seinen Mittelpunkt geht, von innen berührt, und man zieht in dem grös-

seren den beliebigen Durchmesser DFCE (Fig. 379.), nimmt CG = CF und errichtet GH, so ist diese von gleicher Länge mit AF.

Beweis. Man ziehe CH, so ist:

$\angle AFC = R$ (246)
$= \angle HGC$ (Constr.)
$CF = CG$ (Constr.)
$AC = CH$ als Radien,
folglich: $\triangle AFC \cong \triangle HGC$ (49)
daher: $AF = GH$; w. z. b. w.

459. Wenn man über jeder Seite eines Dreiecks als Durchmesser einen Kreis beschreibt, an einen derselben in den Scheiteln seines Durchmessers Tangenten zieht und dieselben bis zum zweiten Durchschnitt mit den Peripherieen der beiden andern Kreise verlängert, so liegen diese Durchschnittspunkte stets mit der dritten Dreiecksspitze in gerader Linie.

Beweis. Es sei (Fig. 380.) ABC das gegebene Dreieck, BD und CE Tangenten, welche man an den um die Seite BC als Durchmesser beschriebenen Kreis in den Scheiteln B und C dieses Durchmessers gezogen und bis zum zweiten Durchschnitt, D und E, mit den Peripherieen der um die Seiten AB und AC, als Durchmessern, beschriebenen Kreise verlängert hat; man ziehe DA und EA, so ist: $\angle BDA = R$ (246)
mithin: $\angle DAB + \angle DBA = R$ (38, Z. 3)
$= \angle DBA + \angle ABC$ (243)
folglich: $\angle DAB = \angle ABC.$
Aus gleichen Gründen ist: $\angle EAC = \angle ACB,$
hierzu addirt: $\angle BAC = \angle BAC$
gibt: $\angle DAB + \angle EAC + \angle BAC = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$
$= 2R$ (38),
folglich AD und AE eine einzige Gerade (21); es liegen also die Punkte D und E mit der dritten Dreiecksspitze A in gerader Linie; w. z. b. w.

460. Errichtet man auf einem der Halbmesser, die nach den Endpunkten eines beliebigen Bogens gehen, im Mittelpunkte des Kreises eine Senkrechte, und zwar nach der Seite hin, auf welcher für den genannten Radius der Bogen liegt, macht sie gleich der Sehne des Bogens, so ist deren Endpunkt von dem

Halbirungspunkte des Bogens um die Länge des Kreishalbmessers entfernt.

Beweis. Es sei (Fig. 381.) CD $\perp$ AC und $=$ AB. Man fälle von C aus CK $\perp$ AB und verlängere CK bis E, so ist: arc. AE $=$ arc. BE (248), also E der Halbirungspunkt des Bogens AEB. Man ziehe nun DE, so soll DE $=$ BC sein.

$\angle AKC = R$ (Constr.)

folglich $\angle BAC + \angle ECA = R$ (38)

$= \angle ECA + \angle ECD$ (Constr.)

mithin: $\angle BAC = \angle ECD$

$AB = CD$ (Constr.)

$AC = CE$ (als Radien),

folglich: $\triangle BAC \cong \triangle DCE$ (45)

daher: $DE = BC$; w. z. b. w.

461. Beschreibt man um den grösseren zweier Kreise, die sich von innen berühren, und von denen der eine durch den Mittelpunkt des andern geht, ein Quadrat, so ist (Fig. 382.) FE $=$ LM.

Beweis. Man ziehe im Berührungspunkte A an die Kreise eine Tangente AO $=$ dem Radius des grössern Kreises, verlängere AO über A und mache AP $=$ AO, so ist OP $=$ dem Durchmesser des grössern Kreises und mithin $=$ der Seite des um denselben zu beschreibenden Quadrates (288, Z. 2). Man vollende dieses Quadrat OPQR; ziehe ferner einen beliebigen, den innern Kreis schneidenden Durchmesser DE im äussern Kreise und durch den Endpunkt E mit einer Quadratseite QR eine Parallele, die man nach beiden Seiten verlängert, bis sie die Diagonale OQ in L und die Seite OR in M schneidet, so soll FE $=$ LM sein. Man ziehe AF und den Durchmesser AB. Da nun OP als Tangente die Kreise in A berührt (Constr.), so ist AB $\perp$ OP (243) $\perp$ QR (25, Z.) $\perp$ LM, folglich: $\angle CKE = R$

$= \angle AFC$ (246)

$\angle KCE = \angle ACF$ (22)

$CE = AC$ (als Radien)

mithin: $\triangle CKE \cong \triangle CFA$ (46)

daher: $CK = CF$.

Ferner ist $BC = BQ$ (Constr.)

also: $\angle QCB = \angle CQB$ (51)

$= \angle CLK$ (24)

mithin: LK = CK (52)
= CF
KM = BR (56); weil BRMK ein Rechteck,
= CE (Constr.)
folglich: LK + KM = CF + CE
oder LM = FE; w. z. b. w.

Anmerkung. Unser Satz, unabhängig von einer Figur ausgedrückt, wurde in seiner Thesis so lauten: „Das Stück eines beliebigen Durchmessers des grössern Kreises, welches durch die Peripherie des kleinern abgeschnitten wird, und der Halbmesser des grössern Kreises zusammengenommen sind gleich einer durch den Endpunkt des Durchmessers mit einer Quadratseite gezogenen und einerseits bis zur anliegenden Quadratseite, andererseits bis zu der die Endpunkte der genannten Quadratseiten verbindenden Diagonale verlängerten Parallele."

462. Schneidet man von der Sehne AB (Fig. 383.) eines beliebigen Bogens ein Stück BD ab, errichtet die Senkrechte DE, macht EF = EB und DG = DB, so ist auch stets AF = AG.

Beweis. Man ziehe GF, so ist:
△EDG ≅ △EDB (45)
daher ∠EGB = ∠EBG
und EG = EB
= EF (Constr.)
folglich: ∠EFG = ∠EGF (51).
Es ist aber ∠AFE + ∠ABE = 2R (275), oder:
∠AFG + ∠GFE + ∠GBE = 2R, mithin auch:
∠AFG + ∠GFE + ∠EGB = 2R
= ∠EGB + ∠EGF + ∠AGF (20),
folglich: ∠AFG = ∠AGF
und mithin: AF = AG (52); w. z. b. w.

Zusatz. Der Satz behält auch noch seine Richtigkeit, wenn man das Stück BD grösser als die Hälfte von AB nimmt; in diesem Falle ergänze man den Bogen AB zum Kreise (Fig. 384.), mache arc. EF = arc. BE und GD = BD, ziehe AF, so ist AG = AF.

Beweis. Man ziehe GE und FE, so ist:
△EGD ≅ △EDB (45),
daher: GE = BE
= EF (Constr.)
folglich: ∠EGF = ∠EFG (51)
∠EGB = ∠EBA, weil △EGD ≅ △EBD.

$= \angle AFE$ (241, Z. 1)

also: $\angle EGF - \angle EGB = \angle EFG - \angle AFE$

oder: $\angle AGF = \angle AFG$

folglich $AF = AG$ (52), w. z. b. w.

463. Wenn man von einem beliebigen Punkte (D Fig. 385.) des zur Berührungssehne (AB) zweier beliebigen Tangenten gehörigen Bogens (ADB) mit den Tangenten selbst zwei Parallelen (DE, DF) nach der Berührungssehne zieht, so ist jede derselben die mittlere Proportionale zwischen den beiden andern Segmenten (AE, FB) der Berührungssehne, die zwischen ihnen und ihren parallelen Tangenten enthalten sind.

Beweis. Man ziehe AD und BD, so ist:

$\angle ADE = \angle DAM$ (24)

$= \angle ABD$ (247)

$= \angle FBD.$

Aus gleichen Gründen $\angle EAD = \angle FDB$

und mithin: $\angle AED = \angle DFB$ (38, Z. 2)

daher: $\triangle AED \sim \triangle DFB$ (196)

also: $AE : DE = DF : BF$;

es war aber $\angle AED = \angle DFB$

mithin: $\angle DEF = \angle DFE$ (20)

also $DE = DF$ (52),

und die obige Proportion lautet daher:

$AE : DE = DE : BF,$

oder $AE : DF = DF : BF$; w. z. b. w.

Zusatz. Wenn die Sehne AB ein Durchmesser ist, so sind die Tangenten AM und BM einander parallel, und die mit ihnen gezogenen Parallelen DE und DF fallen zusammen und werden somit zu einer von einem Punkte im Umkreise auf einen Durchmesser gefällten Senkrechten, wodurch der Satz zu dem 252. im fünften Buche wird; unser Satz ist also eine Verallgemeinerung des angeführten.

464. Schneidet man auf einem Durchmesser von einem seiner Scheitel aus drei solche Stücke ab, dass das eine die mittlere Proportionale zwischen den beiden andern ist, errichtet in diesen Durchschnittspunkten Senkrechte und verbindet die Durchschnitte zwischen ihnen und der Peripherie mit eben jenem Scheitel des Durchmessers, so ist auch von diesen drei Geraden die eine die mittlere Proportionale zwischen den beiden andern.

Beweis. Es sei (Fig. 386.) $AD : AE = AE : AF$, so soll, wenn GD, HE und KF senkrecht auf AB stehen, auch sein: $AG : AH = AH : AK$. Man ziehe GB, HB, KB, so ist

$\angle AGB = \angle AHB = \angle AKB = R$ (246),

folglich $AB : AG = AG : AD$ (209, Z. 2),

daher $AB . AD = AG_q$ (203, Z. 3); aus ähnlichen

Gründen ist auch $AB . AE = AH_q$

$AB . AF = AK_q$, mithin verhält sich

$AB . AD : AB . AE : AB . AF = AG_q : AH_q : AK_q$,

folglich auch $AD : AE : AF = AG_q : AH_q : AK_q$ (143),

aber $AD : AE = AE : AF$ (Vorauss.),

mithin $AG_q : AH_q = AH_q : AK_q$

und daher $AG : AH = AH : AK$ (155); w. z. b. w.

465. Nimmt man auf einem Kreisdurchmesser (AB, Fig. 387.) zwei Punkte, D, E, so, dass AE die mittlere Proportionale zwischen AD und AB, beschreibt über AD und AE als Durchmessern Halbkreise, errichtet die Senkrechte DFG, und verbindet endlich F und G mit A, so ist AF die mittlere Proportionale zwischen AD und AG.

Beweis. Man ziehe EF und BG, so ist

$AD : AE = AE : AB$ (Vorauss.)

$AD : AG = AG : AB$ (209, Z. 2),

folglich $AE_q = AG_q$

und $AE = AG$.

Nun ist $AD : AF = AF : AE$ (209, Z. 2),

daher auch $AD : AF = AF : AG$, w. z. b. w.

466. Zieht man in einem Kreise (AEBM, Fig. 388.) eine beliebige Sehne AB, und beschreibt von dem Halbirungspunkte (C) eines der beiden zugehörigen Bogen ACB einen zweiten Kreis (ANDB), der AB auch zur Sehne hat, so ist von jeder Geraden, welche, von einem der Endpunkte der gemeinschaftlichen Sehne aus gezogen, beide Umkreise zum zweiten Male schneidet, das Stück (DE) zwischen diesen Durchschnittspunkten gleich der Entfernung des Durchschnittspunktes (E) eben dieser Geraden mit der Peripherie des ersten Kreises von dem andern Endpunkte (B) der gemeinschaftlichen Sehne.

Beweis. Man ziehe AC, BC, BE und BD, so ist

$\angle ACB = 2 \angle ADB$ (244)

$\angle ACB = \angle AEB$ (244, Z. 1),

mithin $2\angle ADB = \angle AEB$
$= \angle ADB + \angle EBD$ (38),
folglich $\angle ADB = \angle EBD$
und daher $DE = BE$ (52), w. z. b. w.

Zusatz 1. Die an den ersten Kreis in A oder B gezogene Tangente, verlängert bis zum Durchschnitt mit der Peripherie des zweiten Kreises, ist gleich der gemeinschaftlichen Sehne.

Beweis. Es sei AN eine Tangente an Kreis AEBM; man ziehe BN, von A aus die beliebige Sehne AF und ziehe BF, so ist
$\angle ACB + \angle AFB = 2R$ (275),
aber $\angle ACB = 2\angle ANB$ (244)
$\angle AFB = \angle BAN$ (247),
folglich $2\angle ANB + \angle BAN = 2R$
$= \angle ANB + \angle BAN + \angle ABN$ (38),
mithin $\angle ANB = \angle ABN$
und $AN = AB$ (52), w. z. b. w.

Anmerkung. Ein Blick auf die Figur zeigt, dass, wenn die Gerade AED zur Tangente AN wird, der Punkt E mit dem Punkte A zusammenfällt, also $BE = AB$ wird.

Zusatz 2. Die an den zweiten Kreis in einem der Durchschnittspunkte mit dem ersten gezogene Tangente geht durch den Halbirungspunkt eines der Bogen, in welche der erste Kreis durch die gemeinschaftliche Sehne getheilt wird.

Beweis. Es sei AM eine Tangente an Kreis ANDB; man ziehe CM, so ist $\angle MAC = R$ (246), weil AC der Radius.

Hieraus folgt nach 244, Z. 3, dass arc. MAC = dem halben Umkreis von ACBM, und mithin ist CM ein Durchmesser dieses Kreises. Da nun CM durch den Mittelpunkt des Kreises ANDB geht, so halbirt CM, als Axe beider Kreise, ihre gemeinschaftliche Sehne AB unter rechten Winkeln (264) und folglich auch arc. AMB in M (248); es geht also die Tangente AM des Kreises ANDB durch den Halbirungspunkt M eines der Bogen, AMB, in welche der erste Kreis durch die gemeinschaftliche Sehne getheilt wird; w. z. b. w.

Zusatz 3. Unter allen Dreiecken, die über derselben Grundlinie beschrieben sind, und in denen die Gegenwinkel der Grundlinie von gleicher Grösse sind, hat das gleichschenkelige den grössten Umfang.

Beweis. Es haben das Dreieck AEB und das gleichschenkelige Dreieck ACB dieselbe Grundlinie AB, und deren Gegenwinkel sind gleich, $\angle ACB = \angle AEB$. Man verlängere AC bis G,

so ist $BE = DE$,

also $AE + BE = AD$

$BC = CG = AC$ als Radien,

also $AC + BC = AG$, einem Durchmesser,

aber $AG > AD$ (250, Z. 1),

folglich $AC + BC + AB > AE + BE + AB$; w. z. b. w.

467. Theilt man den Durchmesser (AB, Fig. 389.) eines Halbkreises in zwei beliebige Stücke, AK, KB, beschreibt über jedem derselben als Durchmesser einen neuen Halbkreis, errichtet in dem Theilpunkte K die Senkrechte KD und verbindet D mit A und B, so ist das Verhältniss der Linien AE und BF das dreifach Hohe des Verhältnisses von AD und BD.

Beweis. Man ziehe KE und KF, so ist

$\angle AEK = \angle ADB = \angle KFB = R$ (246),

folglich EK ∥ BD und KF ∥ AD (26, Z.),

mithin verhält sich 1) $AD : BD = AE : EK$ (196);

ferner ist $AE : EK = EK : ED$ (209, Z. 1)

$= EK : KF$ (56),

folglich aus 1 2) $AD : BD = EK : KF$,

ferner 3) $AD : BD = KF : BF$ (196).

Multiplicirt man 1, 2 und 3, so erhält man

$AD^3 : BD^3 = AE : BF$, w. z. b. w.

468. Nimmt man auf der Tangente BE (Fig. 390.), welche einen Halbkreis AFB in dem einen Scheitel B seines Durchmessers berührt, einen beliebigen Punkt C, beschreibt von ihm als Mittelpunkt mit seiner Entfernung von dem genannten Scheitel als Radius einen Kreis, zieht von dem andern Scheitel A eine Gerade ACD durch seinen Mittelpunkt und nimmt $AE = AD$, so ist auch stets AG von gleicher Länge mit AF.

Beweis. Man ziehe BF, so ist

$\angle AFB = R$ (246),

folglich $AB^2 = AF : AE$ (209, Z. 2 und 203, Z. 4)

$AE = AD$ (Constr.),

daher 1) $AB^2 = AF : AD$.

Da ferner $BE \perp AB$ und CB ein Radius des zweiten Kreises ist, so ist AB eine Tangente dieses Kreises (242), und mithin ist

$AB^2 = AG \cdot AD$ (259). Hieraus und aus 1 hat man nun $AF \cdot AD = AG \cdot AD$,

mithin $AF = AG$; w. z. b. w.

Zusatz. Die Länge des Halbmessers CB ist völlig und unbedingt beliebig.

Beweis. Da $\angle ABE = R$, so ist auch $\angle EAB + \angle AEB = R$ (38), also $\angle EAB < R$. Es kann mithin AE niemals eine Tangente werden, sondern muss stets den Halbkreis schneiden, wesshalb demnach das Stück AF immer möglich ist.

469. Berühren sich zwei Kreise von innen und man zieht in dem grösseren eine Sehne (DE, Fig. 391.), welche den kleineren berührt, und verbindet sowohl deren Endpunkte als den Berührungspunkt mit dem Berührungspunkte beider Kreise, so wird der von den beiden ersteren Linien gebildete Winkel (DAE) durch die letztere (AF) halbirt.

Beweis. Man ziehe die Axe der Kreise und verlängere sie nach beiden Seiten hin, bis sie den grössern Kreis in B und den Berührungspunkt A der Kreise trifft (262); ziehe ferner BE und im kleinern Kreise den Radius CF nach dem Berührungspunkte der Tangente, so ist $\angle BEA = R$ (246),

mithin $\angle EBA + \angle EAB = R$ (38)

$\angle EBA = \angle EDA$ (244, Z. 1),

also auch $\angle EDA + \angle EAB = R$

oder 1) $\angle EDA + \angle FAC + \angle EAF = R$. Ferner ist

$\angle FDA + \angle FAD + \angle DFA = 2R$ (38), oder

$\angle EDA + \angle FAD + \angle AFC + \angle CFD = 2R$,

aber $\angle CFD = R$ (243),

folglich $\angle EDA + \angle FAD + \angle AFC = R$. Hieraus und aus 1 erhält man $\angle FAD + \angle AFC = \angle EAF + \angle FAC$

$\angle AFC = \angle FAC$ (52),

weil $CF = CA$ als Radien,

mithin $\angle FAD = \angle EAF$, w. z. b. w.

Zusatz. Berühren sich die Kreise von aussen, so wird in dem Dreieck, welches die Sehne und die ihre Endpunkte mit dem Berührungspunkte der Kreise verbindenden Geraden bilden, nicht der Gegenwinkel der Sehne, sondern der ihr gegenüberliegende Aussenwinkel durch die dritte in Rede stehende Gerade halbirt.

Beweis. Man ziehe (Fig. 392.) die Axe CAB, ferner BE und verlängere DA über A beliebig weit, etwa bis G; ziehe endlich

den Radius CF nach dem Berührungspunkte der verlängerten Sehne DE mit dem andern Kreise, so ist:

$\angle BEA = R$ (246)

mithin: $\angle EAB + \angle EBA = R$ (38)

$\angle EBA = \angle EDA$ (244, Z. 1),

also 1) $\angle EAB + \angle EDA = R$. Ferner ist:

$\angle FDA + \angle DAF + \angle DFA = 2R$ (38)

$\angle CFA + \angle DFA = R$ (243), mithin:

$\angle FDA + \angle DAF - \angle CFA = R$. Aus 1 hat man daher:

$\angle EAB + \angle EDA = \angle FDA + \angle DAF - \angle CFA$

$\angle EDA = \angle FDA$,

also 2) $\angle EAB = \angle DAF - \angle CFA$.

Es ist aber: $\angle CFA = \angle CAF$ (51), weil CF=CA als Radien.

$= \angle GAF + \angle CAG$

$= \angle GAF + \angle BAD$ (22).

Aus 2 hat man daher:

$\angle EAB + \angle BAD + \angle GAF = \angle DAF$

$= \angle EAB + \angle BAD + \angle EAF$

mithin: $\angle GAF = \angle EAF$; w. z. b. w.

470. Halbirt man eines der Segmente CD (Fig. 393.), in welche die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks durch ihr Höhenperpendikel getheilt wird, in E, und beschreibt von B aus mit BE als Radius einen Kreisbogen EFM, so ist: AF = DE = CE.

Beweis. Man ziehe BF, so ist:

$AF^2 = BF^2 - AB^2$ (87, Z. 2)

$= BE^2 - AB^2$, weil BF = BE als Radien.

$= BE^2 - BD \cdot BC$ (87, Z. 1)

$= BE^2 - BD \cdot BE - BD \cdot CE$ (72)

$= BE^2 - BD \cdot BE - BD \cdot DE$, weil CE = DE (Constr.)

$= BE (BE - BD) - BD \cdot DE$ (73)

$= BE \cdot DE - BD \cdot DE$

$= DE (BE - BD)$ (73)

$= DE^2$, folglich

$AF = DE = CE$, w. z. b. w.

471. In jedem rechtwinkeligen Dreieck verhält sich das Quadrat der Linie (CG Fig. 394.), welche einen seiner spitzen Winkel halbirt, zum Quadrat der an diesem Winkel anliegenden

Kathete (CB), wie die Hypotenuse zur halben Summe von Hypotenuse und eben dieser Kathete.

Beweis. Man beschreibe aus C mit AC als Radius einen Kreis, verlängere BC nach beiden Seiten hin bis zum Umkreise und ziehe AD nnd AE, so ist:

$\angle ACD = 2 \angle AED$ (244)

folglich $\angle GCB = \angle AED$

mithin $GC \parallel AE$ (24)

daher ist $\triangle GBC \sim \triangle ABC$ (196)

und es verhält sich: $GC : BC = AE : BE$

$BE = BC + AC$, weil $AC = CE$ als Radien,

also 1) $GC : BC = AE : BC + AC$.

Ferner ist $\triangle GBC \sim \triangle ADE$ (196),

weil $\angle DAE = R$ (246) $= \angle GBC$,

mithin: $GC : BC = DE : AE$

$DE = 2AC$, weil DE der Durchmesser;

also 2) $GC : BC = 2AC : AE$.

Aus 1 und 2 erhält man nun:

$GC^2 : BC^2 = 2AC : BC + AC$ (155)

oder: $GC^2 : BC^2 = AC : \frac{1}{2}(BC+AC)$ (143), w. z. b. w.

472. Beschreibt man über der gemeinschaftlichen Sehne CD (Fig. 395.) zwei sich schneidender ungleicher Kreise als Durchmesser einen dritten Kreis, zieht an diesen in einem der Scheitel D dieses Durchmessers eine Tangente ADB und von dem andern Scheitel aus eine beliebige Schneidende CEFG, so ist: $EF : FG = AD : DB$.

Beweis. Man ziehe DE, DF, DG, AC, BC, so ist:

$\angle CFD = R$ (246)

folglich $\angle DFG = R$ (20)

$= \angle BDC$ (243)

$\angle CGD$ oder $\angle FGD = \angle CBD$ (244, Z. 1)

mithin $\triangle DGF \sim \triangle CBD$ (196),

daher 1) $DF : FG = CD : BD$.

Ferner ist $\angle CAD + \angle CED = 2R$ (244, Z. 3)

$= \angle CED + \angle DEF$ (20)

mithin $\angle CAD = \angle DEF$

$\angle CDA = R$ (243)

$= \angle CFD$ (245)

$= \angle EFD$

folglich $\triangle DEF \sim \triangle CAD$ (196)
daher 2) $EF : DF = AD : CD$.
Aus 1 und 2 hat man nun:
$EF : FG = AD : BD$ (156); w. z. b. w.

473. Haben drei Kreise eine gemeinschaftliche Sehne AB (Fig. 396.), und zieht man von einem Endpunkte derselben ein Paar beliebige Gerade AFEC und AHGD, welche alle drei Kreise schneiden, so sind die Segmente HG, GD der einen Linie denen der andern, FE, EC proportionirt.

Beweis. Man ziehe BFJK, so ist:

1) $BL : AL = DL : KL$
2) $BL : AL = GL : JL$ } (251, Z. 1),

folglich: $DL : GL = KL : JL$
also auch: $DL - GL : GL = KL - JL : JL$ (153)
oder 3) $DG : GL = KJ : JL$
Ferner ist: 4) $BL : AL = HL : FL$ (251, Z. 1).
Aus 4 und 2 hat man nun:
$GL : HL = JL : FL$,
daher auch: $GL - HL : GL = JL - FL : JL$ (153)
oder 5) $GH : GL = FJ : JL$.
Aus 3 und 5 erhält man:
6) $DG : GH = KJ : FJ$.
Ferner ist 7) $BF : AF = EF : FJ$
8) $BF : AF = CF : KF$ } (251, Z. 1)
folglich auch: $EF : CF = FJ : KF$,
daher: $CF - EF : EF = KF - FJ : FJ$ (153)
d. i. 9) $CE : EF = KJ : FJ$.
Aus 9 und 6 erhält man endlich:
$DG : GH = CE : EF$
oder: $GH : DG = EF : CE$ (151), w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des vorigen.

474. Verbindet man die Punkte D, E, F, G, H (Fig. 397.), in denen ein Kreisbogen in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt wird, mit einem seiner Endpunkte, so verhält sich die kleinste (AD) dieser Linien zur nächstfolgenden (AE), wie irgend eine der übrigen (AH) zur Summe ihrer Vorgängerin und Nachfolgerin (AG + AB).

Beweis. Man ziehe DE, GH, BH und EH, verlängere EH über H und AB über B, bis sie sich in J schneiden, so ist:

arc. EDA = 2 arc. BH (V.)

folglich $\angle$ EHA = 2 $\angle$ HAB (245, Z. 1) = 2 $\angle$ HAJ

$\angle$ EHA = $\angle$ HAJ + $\angle$ HJA (38)

mithin $\angle$ HAJ = $\angle$ HJA

folglich 1) HJ = AH (52).

Ferner ist $\angle$ HGA + $\angle$ HBA = 2R (244, Z. 3)

= $\angle$ HBA + $\angle$ HBJ (20)

mithin 2) $\angle$ HGA = $\angle$ HBJ

Es ist: 3) $\angle$ GAH = $\angle$ HAB (245)

= $\angle$ HJB (aus 1),

folglich: $\triangle$ HGA $\cong$ $\triangle$ HBJ (46)

mithin 4) AG = BJ.

Ferner ist $\angle$ HJA = $\angle$ HAJ (aus 1) = $\angle$ HAB = $\angle$ EAD = $\angle$ AED (245)

folglich: $\triangle$ AED $\sim$ $\triangle$ AJH (196).

Daher: AD : AE = AH : AJ

= AH : AB + BJ

und aus 4 hat man: AD : AE = AH : AB + AG, w. z. b. w.

475. Ist ein Kreisbogen AB (Fig. 397.) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, und man verbindet den zweiten der Theilpunkte (E) mit dem letzten (H), verlängert diese Gerade, bis sie die verlängerte Sehne schneidet, so ist diese Verlängerung (HJ) gleich der Sehne (AH), welche den letzten Theilpunkt (H) mit dem Anfangspunkte des Bogens verbindet.

Beweis 1 ist unter 1 des vorigen Beweises enthalten.

Beweis 2. arc. AD = arc. DE = arc. BH (V.)

also arc. ADE = 2 arc. BH

oder arc. ADE — arc. BH = arc. BH,

folglich ist $\angle$ EJA = $\angle$ HAB (A. 440)

oder $\angle$ HJA = $\angle$ HAJ

mithin: HJ = AH (52), w. z. b. w.

476. Allgemein, verbindet man den 2nten Theilpunkt vom ersten an mit dem nten vom letzten an gerechnet und verlängert die Verbindende, bis sie die verlängerte Sehne schneidet, so ist die Verlängerung jener gleich der Sehne, welche den nten Theilpunkt vom letzten an mit dem Anfangspunkte des Bogens verbindet.

Beweis. Bezeichnet n eine beliebige Zahl, so ist 2n das Doppelte von n; jeder Bogen also, der durch den 2nten Theil-

punkt, vom Anfangspunkte an gerechnet, vom gegebenen Kreisbogen abgeschnitten wird, ist offenbar doppelt so gross, als jeder durch den nten Theilpunkt vom Endpunkte an abgeschnittenen; der Unterschied zweier solcher Bogen ist mithin stets gleich dem letzteren, folglich ist auch der Peripheriewinkel, welcher auf diesem steht, und dessen einer Schenkel die Sehne des gegebenen Kreisbogens ist, gleich dem von der verlängerten die Theilpunkte Verbindenden und der verlängerten Sehne gebildeten Winkel nach A. 440 und daher jene Verlängerung gleich der Sehne nach 52; w. z. b. w.

477. Ist ein Kreisbogen in 3n gleiche Theile getheilt, und zieht man an den 2nten Theilpunkt vom ersten an eine Tangente, die man bis zum Durchschnitt mit der verlängerten Sehne verlängert, so ist dieselbe von gleicher Länge mit der Sehne, welche eben diesen 2nten Theilpunkt mit dem Anfangspunkte des Bogens verbindet.

Beweis. Da das Stück des gegebenen Kreisbogens vom Anfangspunkte bis zum 2nten Theilpunkte gleich zwei Drittheilen des ganzen Bogens ist, so ist der Rest gleich einem Drittheil, also halb so gross, als jenes, folglich der Peripheriewinkel, welcher auf diesem Bogenreste steht, und dessen einer Schenkel die Sehne des gegebenen Kreisbogens, die seine beiden Endpunkte verbindet, dessen anderer Schenkel aber die Sehne ist, welche den Anfangspunkt mit dem 2nten Theilpunkte verbindet, gleich dem von ersterer Sehne und der Tangente gebildeten Winkel nach A. 440, Z. 1 und folglich die letztere Sehne gleich der Tangente (52); w. z. b. w.

478. Hat man in einer Ebene zwei beliebige aber gleiche Kreise und zieht eine sie schneidende Gerade parallel mit ihrer Axe, so ist jedes Stück derselben, welches zwischen zwei sich entsprechenden (d. h. solchen, die weder die kleinste, noch die grösste Entfernung von einander haben) Durchschnittspunkten mit den Kreisperipherieen enthalten ist, gleich der Entfernung der beiden Mittelpunkte.

Beweis. Es sei CD $\parallel$ AB; man ziehe AC, AF, BE, BD, so ist: AC = BD, als Radien (V.), und AB $\parallel$ CD (Constr.), folglich: ACDB ein Antiparallelogramm (A. 37),

mithin $\angle ACD = \angle BDC$ (A. 38)

oder $\angle ACD = \angle BDE$

$= \angle BED$ (51), weil BD = BE als Radien;

folglich AC $\parallel$ BE (24),

also ACEB ein Parallelogramm (55),

mithin $AB = CE$ (56).

Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass auch

$AB = DF$; w. z. b. w.

479. Wenn in einem Kreisvierecke eine Diagonale verlängert durch den Durchschnittspunkt der Tangenten geht, welche man an die Endpunkte der andern Diagonale zieht, so verhalten sich die Quadrate zwei von derselben Ecke auslaufender Umfangsseiten, wie die anliegenden Segmente der ihre nicht gemeinschaftlichen Endpunkte verbindenden Diagonale.

Beweis. Es sei F (Fig. 399.) der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der verlängerten Diagonale BE und der an die Endpunkte der andern Diagonale AD gezogenen Tangenten, so ist:

$EF : AF = AF : BF$ (259, Z. 1)

$\angle EFA = \angle BFA$

folglich $\triangle FBA \sim \triangle AFE$ (198)

daher verhält sich: $AB : AF = AE : EF$

oder 1) $AB : AE = AF : EF$ (151).

Ferner verhält sich wegen eben jener Aehnlichkeit:

$AB : BF = AE : AF$

oder 2) $AB : AE = BF : AF$ (151).

Aus 1 und 2 hat man durch Multiplication:

$AB^2 : AE^2 = BF : EF$ (155).

Aber: $BG : GE = BF : EF$ (260),

folglich 3) $AB^2 : AE^2 = BG : GE$.

Ein ähnlicher Beweis gilt auch dafür, dass:

4) $BD^2 : DE^2 = BG : GE$.

Man ziehe nun an einen der Endpunkte, an B, der andern Diagonale BE eine Tangente und verlängere die erste Diagonale AD, bis sie die Tangente in H schneidet; hierauf ziehe man an den andern Endpunkt E der Diagonale BE gleichfalls eine Tangente, so muss diese hinreichend verlängert den Durchschnittspunkt H treffen. Angenommen sie träfe die verlängerte AD in irgend einem andern Punkte, etwa in K, so wäre aus ähnlichen Gründen, aus denen weiter oben die Aehnlichkeit der Dreiecke ABF und AEF, sowie BDF und DEF nachgewiesen worden:

$\triangle BDH \sim \triangle BAH$

und $\triangle DEK \sim \triangle EAK$,

folglich $BD : AB = BH : AH$

$$BD : AB = DH : BH,$$

daher: $BD^2 : AB^2 = DH : AH.$

Ebenso wäre: $DE^2 : AE^2 = DK : AK.$

Aus 3 und 4 hat man aber:

$$AB^2 : AE^2 = BD^2 : DE^2$$

oder $DE^2 : AE^2 = BD^2 : AB^2$ (151, Anmk. 4)

mithin wäre auch: $DH : AH = DK : AK$

daher: $AH - DH : AH = AK - DK : AK$ (153)

oder: $AD : AH = AD : AK,$

folglich wäre $AH = AK$, was nngereimt ist; die an E gezogene Tangente kann also die verlängerte AD in keinem andern Punkte treffen, als in dem Dnrchschnittspunkte H der verlängerten AD mit der an B gezogenen Tangente, und es ist nun der Beweis ganz ähnlich wie oben dafür, dass:

$$BD^2 : AB^2 = DG : AG$$

und $DE^2 : AE^2 = DG : AG$; w. z. b. w.

Zusatz. In obigem Beweise ist dargethan: dass, wenn eine verlängerte Diagonale eines Kreisvierecks dnrch den Durchschnittspnnkt der an die Endpnnkte der andern Diagonale gezogenen Tangenten geht, auch stets diese andere Diagonale, hinreichend verlängert, mit den an die Endpnnkte der erstern gezogenen Tangenten einen gemeinschaftlichen Durchschnittspnnkt hat.

480. Beschreibt man um jedes der vier Dreiecke, in welche ein Viereck durch seine beiden Diagonalen getheilt wird, einen Kreis, so bilden die Mittelpunkte derselben die Ecken eines Parallelogramms.

Beweis. Da BK (Fig. 400.) die gemeinschaftliche Sehne der Kreise E und F, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} EF \perp BD \\ GH \perp BD \end{array}\right\} (264)$$

ebenso: (zweite Zeile)

folglich $EF \parallel GH$ (26, Z. 1).

Aus ähnlichen Gründen ist auch:

$$EH \parallel GF,$$

mithin: EFGH ein Parallelogramm (55); w. z. b. w.

Zusatz 1. Die Winkel dieses Parallelogramms sind denen gleich, unter welchen sich die beiden Diagonalen schneiden.

Beweis. Es ist:

$$\angle EMK = \angle ELK = R \text{ (264)}$$

also $\angle EMK + \angle ELK = 2R$

folglich $\angle MEL + \angle MKL = 2R$ (104)
$= \angle MKL + \angle LKO$ (20),
mithin $\angle MEL = \angle LKO$
oder $\angle HEF = \angle BKC$
$= \angle AKD$ (22),
$\angle HEF = \angle HGF$ (56),
also auch $\angle HGF = \angle BKC = \angle AKD$;
ebenso ist $\angle EHG = \angle EFG = \angle AKB = \angle DKC$; w. z. b. w.

Zusatz 2. Die Durchschnittspunkte der Seiten unseres Parallelogramms mit den Diagonalen des Urvierecks bilden die Ecken eines dem Urviereck ähnlichen Vierecks, das viermal so klein als jenes ist.

Beweis. $\left.\begin{array}{l} KL = BL \\ KM = AM \end{array}\right\}$ (264),
daher $ML \parallel AB$ (63),
folglich $\triangle MKL \sim \triangle AKB$ (24 und 196). Aus gleichen Gründen ist $\triangle KLO \sim \triangle KBC$
$\triangle PKO \sim \triangle DKC$
$\triangle MKP \sim \triangle MKD$,
folglich ist 1) $ALOP \sim ABCD$ (218).
Da ferner $KL = \frac{1}{2}BK$
$MK = \frac{1}{2}AK$,
so ist $ML = \frac{1}{2}AB$ (A. 31, Z.),
folglich $ML^2 = \frac{1}{4}AB^2$ (74, Z. 1),
daher $ML^2 : AB^2 = 1 : 4$,
aber $MLOP : ABCD = ML^2 : AB^2$ (219),
mithin $MLOP : ABCD = 1 : 4$,
oder 2) $MLOP = \frac{1}{4}ABCD$, w. z. b. w.

481. Ist das in Rede stehende Viereck des vorigen Satzes ein Kreisviereck, und man verbindet den Mittelpunkt seines Kreises mit den Mittelpunkten der um die Diagonalendreiecke beschriebenen, so wird dadurch das vorhin näher bezeichnete Parallelogramm in vier Dreiecke zerlegt, welche einzeln den vier Dreiecken ähnlich sind, die je zwei Umfangsseiten und eine Diagonale des Urvierecks zu Seiten haben.

Beweis. Es sei Z (Fig. 401.) der Mittelpunkt des um ABCD beschriebenen Kreises und EFGH das Parallelogramm, dessen Ecken die Mittelpunkte der um die Diagonalendreiecke beschriebenen Kreise

sind, so sollen $\triangle ZEH$, $\triangle ZFE$, $\triangle ZGF$, $\triangle ZHG$ einzeln den Dreiecken CDB, DAC, ABD und BCA ähnlich sein. Es ist

$$\left.\begin{array}{l} ZH \perp AD \\ HE \perp AK \end{array}\right\} (264),$$

also $\angle HLO = \angle ANO = R$

$\angle HOL = \angle AON$ (22),

mithin $\angle LHO = \angle OAN$ (38),

oder 1) $\angle ZHE = \angle DAC = \angle DBC$ (244, Z. 1).

Verlängert man ferner ZE bis M, so ist

$\angle AMZ = R$ (264),

also $\angle ANE + \angle AMZ = 2R$,

folglich $\angle MAN + \angle MEN = 2R$ (104)

$= \angle MEN + \angle NEZ$ (20),

mithin $\angle NEZ = \angle MAN$,

oder 2) $\angle HEZ = \angle BAC$

$= \angle BDC$ (244, Z. 1).

Aus 1 und 2 hat man daher nach 196, Anmk. 1

$$\triangle ZEH \sim \triangle CDB.$$

Ein analoger Beweis gilt auch für die Aehnlichkeit der übrigen in Rede stehenden Dreiecke.

482. Vier Dreiecke, die denen, von welchen der vorige Satz handelt, einzeln congruent sind, erhält man dadurch, dass man den Durchschnittspunkt der Diagonalen des Urvierecks mit den Ecken des mehrerwähnten Parallelogramms verbindet.

Beweis. Es ist (Fig. 401.) $\triangle ZGF \sim \triangle ABD$ (A. 481),

also 1) $\left\{\begin{array}{l} \angle ZGF = \angle ABD \\ \angle ZFG = \angle ADB \end{array}\right.$.

Nun wird aber die gemeinschaftliche Sehne AK der um die Dreiecke AKB und AKD beschriebenen Kreise unter rechten Winkeln halbirt durch ihre Axe EH (264) und mithin auch der zu dieser Sehne in jedem Kreise gehörige Bogen (248); folglich stehen die Centriwinkel NEK und NHK auf Bogen, die halb so gross sind als diejenigen, auf denen die Peripheriewinkel ABK und ADK stehen; daher ist

$$\left.\begin{array}{l} \angle NEK = \angle ABK \\ \angle NHK = \angle ADK \end{array}\right\} (214 \text{ und } 245, Z. 1)$$

(stehen; daher ist … und)

oder $\angle HEK = \angle ABD$

und $\angle EHK = \angle ADB$. Aus 1 hat man mithin

$\angle HEK = \angle ZGF$

$\angle EHK = \angle ZFG$

$$HE = GF \ (56),$$

folglich $\triangle HEK \cong \triangle GFZ$ (46).

Ganz auf ähnliche Weise wird dargethan, dass auch

$$\triangle EKF \cong \triangle GZH$$
$$\triangle GKF \cong \triangle EZH$$
$$\triangle HKG \cong \triangle FZE, \text{ w. z. b. w.}$$

483. Die Kreise, welche sich um die acht Dreiecke, von denen die beiden vorhergehenden Sätze handeln, beschreiben lassen, sind alle untereinander gleich.

Beweis. Nach A. 375 sind Aehnlichkeitspunkte ähnlicher Dreiecke die Durchschnittspunkte (A. 21) der auf den Seiten in ihren Halbirungspunkten errichteten Senkrechten; ein solcher Durchschnittspunkt ist aber auch der Mittelpunkt des um ein Dreieck zu beschreibenden Kreises (240, Z.), folglich sind die Mittelpunkte der um ähnliche Dreiecke beschriebenen Kreise Aehnlichkeitspunkte dieser Dreiecke. Bezeichnet man nun die Radien der um die Dreiecke ZGF (Fig. 401.), ZFE, ZEH, ZHG beschriebenen Kreise mit r, r^1, r^2, r^3, den Radius des um das Urviereck beschriebenen mit R, so ist

$$\left.\begin{aligned} 1)\ \triangle ZGF &\sim \triangle ABD \\ 2)\ \triangle ZFE &\sim \triangle DAC \end{aligned}\right\} \text{(A. 481)},$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} r : R &= ZF : AD \\ r' : R &= ZF : AD \end{aligned}\right\} \text{(A. 371)},$$

mithin

$$r = r'.$$

$$3)\ \triangle ZEH \sim \triangle CDB \text{ (A. 481).}$$ Hieraus und aus 2 hat man

$$\left.\begin{aligned} r' : R &= ZE : CD \\ r^2 : R &= ZE : CD \end{aligned}\right\} \text{(A. 371)},$$

mithin $r^2 = r^1 = r$. Aehnlich wird dargethan,

dass $r^3 = r^2 = r' = r$.

Da nun die Radien gleich, so sind auch die Kreise, die man mit ihnen beschreibt, gleich (316, Z.). Ferner ist $\triangle ZGF \cong \triangle KHE$ (A. 482), folglich ist aus gleichen Gründen, wie die eben angeführten, der Radius des um $\triangle KHE$ beschriebenen Kreises $= r = r' = r^2 = r^3$, also auch die Kreise gleich. Dasselbe gilt für die andern den Punkt K als gemeinschaftliche Spitze habenden Dreiecke; mithin sind die acht in Rede stehenden Kreise alle untereinander gleich; w. z. b. w.

484. Jeder der vier Kreise, welche man um die in 481 näher bezeichneten Dreiecke beschreibt, geht durch eine der Ecken des Urvierecks.

Beweis. Man verlängere (Fig. 401.) ZG bis P. Da G der Mittelpunkt des um $\triangle$KCD, F der Mittelpunkt des um $\triangle$BKC und Z der Mittelpunkt des um das Urviereck beschriebenen Kreises ist, so ist $\angle FQC = \angle GPC = R$ (264),

folglich 1) $\angle QFC + \angle QCF = R$ (38),

eben so 2) $\angle PGC + \angle GCP = R$,

aber $\angle PGC = \angle DKC$ (244 u. 245, Z. 1)

$= \angle DAK + \angle ADK$ (38)

$= \angle KBC + \angle KCB$ (38).

Substituirt man diesen Werth in 2 und addirt

$$\angle BKC = \angle BKC,$$

so hat man, da

$$\angle BKC + \angle KBC + \angle KCB = 2R \text{ (38)}:$$

$$R + \angle GCP = \angle BKC,$$

oder 3) $\angle GCP = \angle BKC - R$.

Nun sind im Kreise F die beiden Peripheriewinkel, welche auf den Bogen stehen, zu denen die Sehne BC gehört, aber auf verschiedenen Seiten dieser Sehne liegen, zusammengenommen gleich zwei Rechten (244, Z. 3). Der eine dieser Winkel ist $\angle$BKC; der andere steht auf einem doppelt so grossen Bogen als der Centriwinkel QFC, weil BQ = CQ (264), mithin der zu BC gehörige Bogen durch die verlängerte FZ halbirt wird (244); folglich ist $\angle$QFC gleich diesem anderen Peripheriewinkel (244 und 245, Z. 1) und daher

$$\angle BKC + \angle QFC = 2R,$$

oder $\angle BKC - R = R - \angle QFC$.

Aus 3 erhält man demnach $\angle GCP = R - \angle QFC$.

4) $\angle GCP = \angle QCF$ (aus 1).

Ferner ist $\angle ZQC + \angle ZPC = 2R$,

folglich $\angle PZQ + \angle PCQ = 2R$ (104)

$\angle PCQ = \angle PCG + \angle GCQ$,

daher mit Rücksicht auf 4

$$\angle QCF + \angle GCQ + \angle PZQ = 2R,$$

oder $\angle GCF + \angle GZF = 2R$.

Folglich ist ZGCF ein Kreisviereck (244, Z. 4), und es muss mithin der Kreis, welcher um das Dreieck ZGF beschrieben ist, auch durch den Punkt C, d. h. durch eine Ecke des Urvierecks gehen.

Analog diesem Beweise wird dargethan, dass auch die andern in Rede stehenden Kreise durch die entsprechenden Ecken des Vierecks ABCD gehen; w. z. b. w.

485. Die Mittelpunkte dieser vier Kreise bilden die Ecken eines Kreisvierecks.

Beweis. Errichtet man auf den Seiten der in Rede stehenden Dreiecke in ihren Halbirungspunkten Senkrechte und verlängert dieselben bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so bilden die Ecken des so entstandenen Vierecks RSTW (Fig. 401.) die Mittelpunkte der um die Dreiecke beschriebenen Kreise (240, Z.). Nun sind in den Vierecken ZMBQ und ZVSX:

$$\angle ZMB + \angle ZQB = \angle ZVS + \angle ZXS = 2R \ (264)$$

mithin $\angle MZQ + \angle MBQ = \angle VZX + \angle VSX = 2R$ (104)

daher $\angle MBQ = \angle VSX$

oder $\angle ABC = \angle RSF$:

aus ähnlichen Gründen ist auch:

$$\angle ADC = \angle RWT$$

aber $\angle ABC + \angle ADC = 2R$ (275)

folglich: $\angle RST + \angle RWT = 2R$

mithin RSTW ein Kreisviereck (244, Z. 4); w. z. b. w.

Anmerkung. Dasselbe gilt von den Mittelpunkten der um die andere Quaternion von Dreiecken (482) beschriebenen Kreise. Die Construction des Vierecks, dessen Ecken die in Rede stehenden Mittelpunkte bilden, so wie der Beweis, dass dieses Viereck ein Kreisviereck sei, ist analog dem eben geführten.

486. Der Mittelpunkt des Kreises, den man um das im vorigen Satze näher bezeichnete Kreisviereck beschreibt, fällt mit dem Mittelpunkte des Kreises um das Urviereck zusammen.

Beweis. Die Ecken des Vierecks RSTW (Fig. 401.) sind die Mittelpunkte der um die Dreiecke EZH, EZF, FZG, HZG beschriebenen Kreise (Siehe Beweis zu A. 485); da diese unter einander gleich sind (A. 483), so sind es auch ihre Radien RZ, SZ, TZ, WZ; diese Geraden gehen also von einem einzigen Punkte Z aus, und ihre anderen Endpunkte liegen in der Peripherie eines Kreises, nämlich des um RSTW beschriebenen, denn RSTW ist ein Kreisviereck (A. 485); man kann mithin vom Punkte Z aus mehr als zwei gleiche Gerade nach dem Umkreise ziehen, folglich ist dieser Punkt Z der Mittelpunkt des um das Viereck RSTW beschriebenen Kreises (249, Z.), er ist aber auch der Mittelpunkt des um das Urviereck beschriebenen; es fallen demnach die beiden in Rede stehenden Mittelpunkte zusammen; w. z. b. w.

487. Die Seiten des in 485. näher bezeichneten Kreisvierecks sind parallel den Seiten des Urvierecks, seine Diagonalen aber

parallel mit den Seiten des Parallelogramms, dessen Ecken die Mittelpunkte der um die vier Diagonaldreiecke des Urvierecks beschriebenen Kreise sind.

Beweis. Es ist (Fig. 401.) Z der Mittelpunkt des Kreises um ABCD, E der Mittelpunkt des Kreises um △AKB, AB die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise, folglich die Axe ZEM ⊥ AB (264). Aus dem Beweise zu A. 485 wissen wir aber auch, dass ZM ⊥ RS; folglich RS ∥ AB (26, Z. 1). Aehnlich ist der Beweis, dass auch ST ∥ BC, WT ∥ DC und RW ∥ AD sei.

Zieht man ferner XY, so ist S der Mittelpunkt des um △EZF, T derjenige des um △GZF beschriebenen Kreises, folglich wird die gemeinschaftliche Sehne ZF dieser beiden Kreise durch ihre Axe ST halbirt (264), es ist also:

ZX = FX
Ebenso ist: ZY = GY,
folglich 1) GF = XY (63).

Ferner ist Z der Mittelpunkt des um △RST beschriebenen Kreises, und da ZX ⊥ ST, so wird die Sehne ST halbirt (244), also:

SX = TX.
Ebenso ist: WY = TY,
folglich 2) WS ∥ XY.
Aus 1 und 2 hat man: WS ∥ GF (27) ∥ HE.
Aehnlich beweist man, dass RT ∥ GH ∥ EF; w. z. b. w.

488. Hat man ein beliebiges Kreisviereck (ABCD Fig. 402.) und fällt in jedem der vier Dreiecke (ABC, ABD, ACD, BCD), die je zwei Seiten des Urvierecks und eine seiner Diagonalen zu Seiten haben, die Höhenperpendikel; so bilden die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte (E, F, G, H) dieser vier Ternionen von Linien die Ecken eines Vierecks, welches dem Urvierecke congruent ist; also auch ein Kreisviereck ist, dessen Kreis dem um das Urviereck gleich ist.

Beweis. In den Dreiecken GUB und CLB ist:
∠GUB = ∠CLB = R (Constr.)
∠GBU = ∠CBL (22)
folglich: ∠UGB = ∠BCL (38)
oder 1) ∠QGB = ∠BCA
= ∠BDA (244, Z. 1).
In den Dreiecken ZHA und JDA ist:
∠HZA = ∠DJA = R (Constr.)

$\angle ZAH = \angle DAJ$ (22)

folglich: $\angle ZHA = \angle ADJ$ (38)

oder 2) $\angle QHA = \angle BDA$. Aus 1 und 2 hat man:

$\angle QGB = \angle QHA$

$\angle GQB = \angle HQA$ (22),

folglich: $GQ : BQ = HQ : AQ$ (196),

mithin 3) HABG ein Kreisviereck (251, Z. 2).

Ferner ist: $\angle DBC = \angle DAC$ (244, Z. 1)

oder: $\angle DBR = \angle DAO$

$\angle DRB = \angle DOA = R$ (Constr.)

folglich: $\angle BDR = \angle ADO$ (38), mithin auch:

$\angle BDR + \angle EDB = \angle ADO + \angle EDB$,

oder 4) $\angle EDV = \angle NDa$.

Ferner ist in den Dreiecken PCa und NDa:

$\angle PaC = \angle NaD$ (22)

$\angle aPC = \angle aND = R$ (Constr.),

folglich: $\angle PCa = \angle NDa$ (38)

oder 5) $\angle FCV = \angle NDa$, aus 4 und 5 hat man:

$\angle FCV = \angle EDV$

$\angle FVC = \angle EVD$ (22),

folglich: $CV : FV = DV : EV$ (196),

mithin 6) EFCD ein Kreisviereck (251, Z. 2).

Ferner ist: $\angle XLC = \angle XPC = R$ (Constr.)

$\angle LXC = \angle PXB$ (22)

folglich: $\angle LCX = \angle PBX$ (38),

hierzu addirt: $\angle ACD = \angle ABD$ (244, Z. 1)

gibt: $\angle PCD = \angle ABL$,

oder: $\angle FCY = \angle ABL$

$= \angle GBW$ (22)

und da: $\angle FYC = \angle GWB = R$ (Constr.),

so ist: $\angle CFY = \angle BGW$ (38)

$= \angle BGC$

aber: $\angle CFY + \angle CFB = 2R$ (20)

folglich $\angle BGC + \angle CFB = 2R$, mithin auch:

$\angle GBF + \angle GCF = 2R$ (104),

folglich 7) BFCG ein Kreisviereck (244, Z. 4).

Ferner ist wie $\angle AbO = \angle DbJ$ (22)

$\angle AOb = \angle DJb = R$ (Constr.)

folglich $\angle OAb = \angle bDJ$ (38)

hierzu: $\angle BAC = \angle BDC$ (244, Z. 1)
gibt: $\angle BAJ = \angle EDK$
$\angle BAJ = \angle HAM$ (22)
mithin $\angle HAM = \angle EDK$
$\angle HMA = \angle EKD = R$ (Constr.),
daher: $\angle AHM = \angle DEK$
oder: $\angle AHD = \angle DEK$,
aber $\angle AED + \angle DEK = 2R$ (20), folglich
$\angle AHD + \angle AED = 2R$, also auch:
$\angle HAE + \angle HDE = 2R$,
mithin 8) AEDH ein Kreisviereck (244, Z. 4). Ferner ist
$\angle BAD + \angle BCD = 2R$ (275)
$= \angle FCD + \angle FED$ (275), oder:
$\angle BAE + \angle EAD + \angle BCF + \angle FCD = \angle FCD + \angle FEK + \angle KED$
$= \angle FCD + \angle FEK + \angle EAD + \angle ADE$
mithin $\angle BAE + \angle BCF = \angle FEK + \angle ADE$ [(38)
$\angle BCF$ oder $\angle BCP = \angle ADO$ oder $\angle ADE$ (38), weil in den Dreiecken BCP und ADO zwei Rechte und zwei gleiche Peripheriewinkel sind;
folglich $\angle BAE = \angle FEK$
mithin AB $\parallel$ EF (24)
AK $\perp$ CD
AY $\perp$ CD,
folglich AE $\parallel$ BF (26, Z. 1)
mithin 9) ABFE ein Parallelogramm (55). Ferner ist
$\angle HGA + \angle AGB + \angle HAB = 2R$ (aus 3 und nach 275)
$\angle AGB = \angle BHA$ (244, Z. 1), also:
$\angle HGA + \angle BAH + \angle BHA = 2R$
$= \angle BAH + \angle BAJ$ (20),
mithin: $\angle HGA + \angle BHA = \angle BAJ$.
Aus dem Beweise zu 8 wissen wir aber, dass:
$\angle BAJ = \angle EDK$
$= \angle EDC$
und $\angle BHA = \angle ADJ$ (38, für die Dreiecke ZHA und ADJ, zwei Scheitelwinkel und zwei Rechte),
folglich: $\angle HGA + \angle ADJ = \angle EDC$
$\angle ADJ + \angle NDa = \angle PCa$ (38)
$= \angle FCV$
$= \angle EDV$ (38),

mithin $\angle HGA + \angle EDV = \angle EDC$

oder $\angle HGA = \angle EDC - \angle EDV$

$= \angle RDC$

$= \angle CBF$ (8, in Betracht der Dreiecke FDY und BRF) $= \angle CGF$ (aus 7 und nach 244, Z. 1)

also auch: $\angle HGF = \angle UGC$ oder $\angle UGW$.

Da nnn die Winkel bei U und W Rechte sind, so ist

$\angle UGW + \angle UBW = 2R$ (104)

$= \angle UBW + \angle WBC$

also $\angle UGW = \angle WBC$

daher auch $\angle HGF = \angle WBC$

addirt man: $\angle CGF = \angle CBF$

so ist mithin: $\angle HGC = \angle WBF = \angle WBY$,

und da die Winkel bei W und Y Rechte, so ist auch:

$\angle WBY + \angle WCY = 2R$ (104)

und daher $\angle HGC + \angle WCY$ oder $\angle HGC + \angle GCD = 2R$,

folglich $GH \parallel CD$ (26)

$GC \perp WM$, $DH \perp WM$ (Constr.)

daher $GC \parallel DH$ (26, Z. 1)

mithin 10) CDHG ein Parallelogramm (55).

Ferner ist, da die Winkel bei Z und N Rechte, also gleich, und bei c Vertikalwinkel, also gleich sind:

$\angle NEc = \angle ZHc$. (38)

$= \angle ZHA + \angle AHE$

$= \angle ADJ + \angle ADE$ (38 u. 244, Z. 1)

$= \angle ADd + \angle NDE$

$= \angle BCd + \angle OCE$ (38, 244, Z. 1 u. 22)

$= \angle BCE$

$\angle NEc + \angle HEC = 2R$ (20), mithin

$\angle BCE + \angle HEC = 2R$

folglich $BC \parallel HE$

$CEN \perp DZ$, $BZH \perp DZ$ (Constr.)

daher $CE \parallel BH$ (26, Z. 1)

folglich 11) BCEH ein Parallelogramm (55).

Ferner ist: $\angle BGA = \angle BHA$ (244, Z. 1)

$= \angle ZHA$

$= \angle ADJ$ (aus dem Beweise zu 11)

$= \angle NDa$
$= \angle PCa$ (aus dem Beweise zu 6)
$= \angle FCE$
$= \angle FDE$ (244, Z. 1)

und da AB ∥ EF und AG ∥ DF (26, Z. 1, weil beide senkrecht auf CU)

so ist: $\angle GAB = \angle EFD$ (A. 4)
$AB = EF$ (aus 9 und nach 56)

folglich $\triangle ABG \cong \triangle EDF$ (46)

daher $AG = DF$
$AG \parallel DF$

mithin 12) AGFD ein Parallelogramm (54 und 55).

Aus 9, 10, 11 und 12 hat man nun:

$$\left.\begin{array}{l} AB = EF \\ AD = FG \\ BC = EH \\ CD = GH \end{array}\right\} (56)$$

ferner: $\angle BAE = \angle BFE$ (56)
$\angle EAD = \angle BFG$ (A. 4)

folglich: $\angle BAD = \angle GFE$

ebenso ist: $\angle ABC = \angle FEH$
$\angle ADC = \angle FGH$
$\angle BCD = GHD$

mithin ist: ABCD ≅ FEHG (A. 103), letzteres daher ebenfalls ein Kreisviereck, und da △BAD ≅ △EFG (45), so verhält sich der Radius des um △BAD beschriebenen Kreises zu dem Radius des um △EFG beschriebenen, wie AD : FG (A. 134 und 135); aber AD = FG, mithin sind auch die Radien und folglich deren Kreise gleich; da aber der Kreis um △ABD durch den Punkt C gehen muss, weil ABCD ein Kreisviereck, und ebenso der Kreis um △EFG durch den Punkt H, so sind die Kreise um die Vierecke einander gleich; w. z. b. w.

489. Beschreibt man aus jeder Ecke eines Dreiecks zwei Kreise, von denen der eine die eine, der andere die andere der vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte auslaufenden Seiten in demjenigen Punkte schneidet, in welchem der zu dieser Seite gehörige äussere Berührungskreis (Siehe die Erklärung A. 532) dieselbe berührt, dergestalt also, dass sich von den sechs Kreisen je zwei auf einer Dreiecksseite von aussen berühren; und beschreibt man darauf auch aus jeder Ecke einen

Kreis, welcher die beiden Kreise, die sich auf der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite von aussen berühren, von innen berührt, so sind die zu dieser letzten Ternion gehörigen Kreise von gleicher Grösse.

Beweis. Man halbire (Fig. 403.) die Nebenwinkel von $\angle ABC$ und $\angle ACB$; verlängere die Halbirenden, bis sie sich in G schneiden; fälle von G auf BC die Senkrechte GD und beschreibe aus B und C als Mittelpunkten mit BD und CD als Radien zwei Kreise, so berühren sich dieselben in D von aussen (263, Anmk.); verlängert man ferner AC und AB, bis sie die Umkreise in K und H schneiden, zieht GK und GH, so ist

$$CK = CD \text{ (als Radien)}$$
$$CG = CG$$
$$\angle GCK = \angle GCD \text{ (Constr.)},$$

mithin $\triangle GCK \cong \triangle GCD$ (45).

Ebenso ist $\triangle GBH \cong \triangle GBD$,

daher

$$CK = CD$$
$$BH = BD$$
$$GK = GD = GH$$
$$\angle CKG = \angle CDG = \angle BHG = R.$$

Der aus G als Mittelpunkt mit GD als Halbmesser beschriebene Kreis berührt demnach BC in D und die verlängerten AB und AC in H und K, und AH und AK sind Tangenten dieses Kreises (242), folglich $AH = AK$ (259, Z. 2). Beschreibt man daher aus A als Mittelpunkt mit AH als Halbmesser einen Kreis, so berührt derselbe die aus B und C mit BD und CD als Radien beschriebenen Kreise in H nnd K von innen (263, Anmk.). Dieser Kreis ist nun einer von den drei in Rede stehenden der letzten Ternion.

Führt man ferner dieselbe Construction in Bezug auf die Ecke B aus: halbirt man also die Nebenwinkel von $\angle BAC$ und $\angle BCA$, verlängert die Halbirenden bis zu ihrem Durchschnitt in L, fällt $LE \perp AC$ und beschreibt aus A und C mit AE und CE als Halbmessern zwei Kreise, so berühren sich dieselben in E von aussen (263, Anmk.); verlängert man nun BA bis M, BC bis N, zieht LM und LN, so ist aus gleichen Gründen wie oben

$$AM = AE$$
$$CN = CE$$
$$ML = EL = NL$$

$$\angle AML = \angle AEL = \angle CNL = R$$
$$BM = BN.$$

Ein aus B mit BM als Halbmesser beschriebener Kreis berührt demnach die aus A und C mit AE und CE als Radien beschriebenen in M und N von innen (263, Anmk.). Dieser Kreis ist der zweite von den drei in Rede stehenden der letzten Ternion.

Den dritten endlich erhält man durch eine den Betreffs der Ecken A und B ausgeführten Constructionen entsprechende Construction in Bezug auf die Ecke C; er berührt die aus B und A mit BJ und AJ als Radien beschriebenen und in J von aussen sich berührenden Kreise in P und Q von innen aus gleichen Gründen, wie die oben erwähnten.

Nun ist $AH = AB + BH$
$= AB + BD,$
ebenso $AK = AC + CD,$
mithin $AH + AK = AB + AC + BC,$
und da $AH = AK,$
so ist $AH = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).$ Auf analoge Weise
findet man $BM = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$
und $CP = \frac{1}{2}(AB + AC + BC),$
folglich $AH = BM = CP.$

Da aber AH, BM, CP die Radien der drei in Rede stehenden Kreise sind, so sind auch diese von gleicher Grösse; w. z. b. w.

490. Sind in einem Kreisvierecke zwei Gegenwinkel Rechte, so ist die Summe der Quadrate der vier Diagonalstücke gleich dem Quadrate des Durchmessers vermehrt um das Quadrat des Unterschiedes von den Segmenten derjenigen Diagonale, welche die Spitzen der rechten Winkel verbindet.

Beweis. Es seien (Fig. 404.) die Winkel bei B und D Rechte,
so ist $AE \,.\, CE = BE \,.\, DE$ (251),
also auch $2AE \,.\, CE = 2BE \,.\, DE.$
Nun ist $AE^2 + CE^2 + BE^2 + DE^2 + 2AE \,.\, CE =$
$AE^2 + CE^2 + BE^2 + DE^2 + 2BE \,.\, DE$
oder $AE^2 + CE^2 + 2AE \,.\, CE + BE^2 + DE^2 - 2BE \,.\, DE =$
$AE^2 + CE^2 + BE^2 + DE^2$
oder $(AE + CE)^2 + (BE - DE)^2 = AE^2 + CE^2 + BE^2 + DE^2;$
w. z. b. w.

491. Zieht man in einem Kreise zwei beliebige Sehnen so, dass sie sich unter rechten Winkeln schneiden, und beschreibt über

den vier Segmenten dieser Linien als Durchmessern Kreise, so sind diese zusammen so gross als der Umkreis.

Beweis. Es seien die Winkel bei E (Fig. 405.) Rechte; man ziehe AD, AC, BC, den Durchmesser DF und die Sehne AF,

so ist $\angle DAF = R$ (246)
$= \angle AEC$ (Vorauss.)
$\angle AFD = \angle ACD$ (244, Z. 1)
$= \angle ACE$,
folglich $\angle ADF = \angle CAE$ (38, Z. 2)
$= \angle CAB$,
mithin arc. AF = arc. BC (245),
daher chord. AF = chord. BC (245, Z. 5).

Bezeichnet man den Kreis um DF mit K, den Kreis um AE mit K^1, den um BE mit K^2 u. s. w., so ist

$K = K^5 + K^7$ (322, Z. 2),
und da AF = BC,
so ist $K = K^5 + K^6$,
aber $K^5 = K^1 + K^3$
und $K^6 = K^2 + K^4$ } (322, Z. 2),
folglich $K = K^1 + K^2 + K^3 + K^4$; w. z. b. w.

492. Zieht man von einem beliebigen Punkte (A, Fig. 406.) ausserhalb eines Kreises eine Gerade (AK) so, dass sie einen verlängerten Durchmesser (DGK) rechtwinkelig schneidet, so ist das Quadrat dieser Linie kleiner als das Rechteck aus den Segmenten (AE, AB) einer beliebigen von eben diesem Punkte nach dem Kreise gezogenen Schneidenden (AEB), und zwar um das Rechteck aus den Segmenten (GK, DK) des Durchmessers, die zwischen seinen Scheiteln und dem Fusspunkte der Senkrechten liegen.

Beweis. Man ziehe AD und GF, so ist

$\angle GFD = R$ (246),
folglich auch $\angle GFA = R$ (20)
$\angle GKA = R$ (Constr.),
also $\angle GFA + \angle GKA = 2R$,
und daher $\angle KGF + \angle KAF = 2R$ (104),

mithin ist AFGK ein Kreisviereck (244, Z. 4), und demzufolge sind die Geraden AD und DK zwei Schneidende des Kreises um AFGK;

folglich AD . DF = DK . DG
Für Kreis GFDBG ist ebenso AD . AF = AB . AE } (256),

aber $AD^2 = AD \cdot AF + AD \cdot DF$
und $DK^2 = DK \cdot DG + DK \cdot GK$ } (72, Z. 1),
mithin $AD^2 - DK^2 = AB \cdot AE - DK \cdot GK$
$AD^2 - DK^2 = AK^2$ (87, Z. 2),
folglich $AK^2 = AB \cdot AE - DK \cdot GK$; w. z. b. w.

Zusatz. Wenn die Senkrechte nicht die Verlängerung des Durchmessers, sondern diesen selbst trifft, so ist das Quadrat derselben grösser als das Rechteck aus den Segmenten (AE, AB, Fig. 407.) der Schneidenden, und zwar um das Rechteck aus den Segmenten (DK, GK) des Durchmessers, welche zwischen seinen Scheiteln und dem Fusspunkte der Senkrechten liegen.

Beweis. Man ziehe AD, GF, DM, so ist

$\triangle AKD \sim \triangle GDF$ (196),
daher $AD : DG = DK : DF$,
folglich $AD \cdot DF = DG \cdot DK$ (202, Z. 5)
$AD \cdot AF = AB \cdot AE$ (256).
Nun ist $AD^2 = AD \cdot AF + AD \cdot DF$,
also auch $AD^2 = AB \cdot AE + DG \cdot DK$
$DK^2 = DM^2 - KM^2$ (87, Z. 2)
$= DG \cdot DK - DK \cdot GK$ (87, Z. 1 und 89),
also $AD^2 - DK^2 = AB \cdot AE + DG \cdot DK - (DG \cdot DK - DK \cdot GK)$
$= AB \cdot AE + DK \cdot GK$,
aber $AD^2 - DK^2 = AK^2$ (87, Z. 2),
mithin $AK^2 = AB \cdot AE + DK \cdot GK$; w. z. b. w.

Anmerkung. Der vorstehende Satz kann als eine Erweiterung des 259. im fünften Buche angesehen werden; denn ist AK eine Tangente, so wird $GK = 0$, und man erhält aus den Schlussgleichungen des Haupt- und Zusatzes: $AK^2 = AB \cdot AE$.

493. Zieht man sowohl an die beiden Scheitel des Durchmessers eines beliebigen Halbkreises, als auch an einen beliebigen dritten Punkt Tangenten, und verbindet ihre Durchschnittspunkte (D, E, Fig. 408.) mit dem Mittelpunkte, so stehen diese beiden Geraden senkrecht aufeinander.

Beweis. Man ziehe CF, so ist

$AE = EF$ (250, Z. 4)
$AC = CF$ (als Radien)
$CE = CE$,
folglich $\triangle ACE \cong \triangle CFE$ (50).
Ebenso ist $\triangle CBD \cong \triangle CFD$,

daher $\angle ACE = \angle ECF$

und $\angle BCD = \angle FCD$,

also $\angle ACE + \angle BCD = \angle ECF + \angle FCD$

$= \angle ECD$, aber

$\angle ACE + \angle BCD + \angle ECD = 2R$ (20),

folglich $\angle ECD = R$

und $CE \perp CD$; w. z. b. w.

494. Verbindet man dagegen (unter den im vorigen Satze gemachten Voraussetzungen) die Durchschnittspunkte (D, E, Fig. 408.) unserer Tangenten mit den Scheiteln des Durchmessers, so liegt der Durchschnittspunkt (L) dieser beiden Linien immer auf der Geraden (FK), welche man durch den Berührungspunkt (F) der dritten Tangente parallel mit den beiden erstern zieht.

Beweis. Man ziehe FL und verlängere FL bis K, so ist zu beweisen, dass $FK \parallel AE \parallel BD$.

Da $AE \parallel BD$ (243 und 26, Z. 1),

so ist $\angle AEL = \angle DBL$ (24)

$\angle ALE = \angle DLB$ (22),

folglich $\triangle AEL \sim \triangle DBL$ (196),

daher $AE : BD = AL : DL$,

aber $AE = EF$

und $BD = DF$ } (250, Z. 4),

also $EF : DF = AL : DL$,

mithin $FK \parallel AE \parallel BD$ (195); w. z. b. w.

Zusatz. Die Gerade FK wird in dem genannten Punkte L halbirt.

Beweis. Es ist $\triangle AED \sim \triangle FLD$, $\triangle AEB \sim \triangle KLB$ } (196),

daher $AE : FL = DE : DF$

$= AB : BK$ (195, Z. 2)

$= AE : KL$,

folglich $FL = KL = \frac{1}{2}FK$; w. z. b. w.

495. Bleibt Alles wie bei den beiden vorigen Sätzen, so ist das Rechteck aus den beiden Stücken (EF, FD, Fig. 408.), in welche die dritte Tangente (DE) im Berührungspunkte getheilt wird, eine unveränderliche Grösse, wo auch zwischen A und B der Punkt F genommen werden möge.

Beweis. Da DE eine Tangente, so steht der Radius, wo auch der Punkt F genommen werden möge, in diesem Punkte immer senkrecht auf DE (243); da ferner $\angle ECD = R$ (A. 493), also CF stets das Höhenperpendikel der Hypotenuse, so ist auch stets

$$EF : FC = FC : DF \quad (209, Z. 1),$$

daher $$FC^2 = EF \,.\, DF \quad (202, Z. 5),$$

d. h. der constante Werth des in Rede stehenden Rechtecks ist gleich dem Quadrat des Radius.

496. Die Peripherieen aller Kreise, deren Durchmesser solche Stücke von den an einen andern Kreis gezogenen Tangenten sind, welche zwischen zwei parallelen Tangenten eben dieses Kreises liegen, haben immer einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Beweis. Halbirt man DE (Fig. 408,) in G und zieht CG, so ist $\angle ECD = R$ (A. 493),

folglich $CG = \frac{1}{2}DE = EG = GD$ (A. 61).

Beschreibt man daher über DE als Durchmesser einen Kreis, so muss derselbe durch den Punkt C gehen; da aber nach A. 493 der Punkt F beliebig ist, so gilt dasselbe für jeden andern entsprechend beschriebenen Kreis; w. z. b. w.

Zusatz. Dieser Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt des erstern Kreises.

Beweis folgt unmittelbar aus dem Beweise des Hauptsatzes.

497. Wenn in einem Kreisviereck eine der Diagonalen verlängert durch den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten geht, welche man an die Endpunkte der andern Diagonale zieht, oder mit diesen Tangenten parallel läuft, so sind die Rechtecke aus je zwei Gegenseiten gleich.

Beweis. Erster Fall. Es ist (Fig. 409.)

$$\angle CBE = \angle BAE \quad (247)$$
$$\angle BEC = \angle BEA,$$

mithin $\triangle BCE \sim \triangle ABE$ (196).

Ebenso ist $\triangle CDE \sim \triangle ADE$,

daher $AB : BC = AE : BE$

und $AD : CD = AE : DE$

$$BE = DE \quad (250, Z. 4),$$

folglich $AB : BC = AD : CD$,

mithin $AB \,.\, CD = BC \,.\, AD$ (202, Z. 5).

Zweiter Fall. Ist eine Diagonale BD (Fig. 410.) den an die Endpunkte der andern gezogenen Tangenten parallel, so muss diese letztere, AC, ein Durchmesser sein (A. 19), und es ist

$\angle BCA + \angle BAC = R$ (246 und 38)

$= \angle BAC + \angle ABF$,

daher $\angle BCA = \angle ABF$

$\angle ABC = \angle AFB = R$,

mithin $\triangle ABC \sim \triangle AFB$,

ebenso $\triangle ADC \sim \triangle AFD$,

folglich $AB : BC = AF : BF$

$AD : CD = AF : DF$

$BF = DF$ (248),

mithin $AB : BC = AD : CD$,

folglich $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ (202, Z. 5); w. z. b. w.

Anmerkung 1. Es ist gleichgültig, welche der beiden Diagonalen es ist, der die im Satze angegebene Eigenschaft zukommt (A. 479, Z.).

Anmerkung 2. Ist eine Diagonale ein Durchmesser, so lauft die andere den an die Endpunkte der ersteren gezogenen Tangenten parallel (zweiter Fall des Hauptsatzes).

Zusatz. Daher ist in einem solchen Kreisvierecke das Rechteck aus einem Paare Gegenseiten halb so gross als das Rechteck aus den Diagonalen.

Beweis. $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ (276)

$AB \cdot CD = BC \cdot AD$,

folglich $AB \cdot CD = BC \cdot AD = \frac{1}{2} AC \cdot BD$; w. z. b. w.

498. Sind in einem Kreisvierecke die Rechtecke aus je zwei Gegenseiten einander gleich, so geht die Verlängerung jeder seiner Diagonalen durch den Durchschnittspunkt der an die Endpunkte der andern gezogenen Tangenten, oder läuft ihnen parallel.

Beweis. Erster Fall. (Fig. 409.) Die an B gezogene Tangente schneide die verlängerte AC in E. Angenommen, die an D gezogene Tangente ginge nicht durch den Punkt E, sondern träfe die verlängerte AC in irgend einem andern Punkte, etwa in G, so ist $\triangle ABE \sim \triangle CBE$ (196), weil $\angle CBE = \angle BAE$ (247),

ebenso $\triangle ADG \sim \triangle CDG$. Es verhält sich also

$AB : BC = BE : CE$

$AD : CD = DG : CG$,

aber $AB \cdot CD = AD \cdot BC$,

folglich $AB : BC = AD : CD$ (203, Z. 2),

mithin 1) BE : CE = DG : CG.
Aus der Aehnlichkeit der genannten Dreiecke hat man ferner

AB : BC = AE : BE
AD : CD = AG : DG,

daher 2) AE : BE = AG : DG. Aus 1 und 2 erhält man

AE : CE = AG : CG
AE — CE : CE = AG — CG : CG (153)

oder AC : CE = AC : CG,

folglich CE = CG, was nicht möglich ist; es kann also die an D gezogene Tangente die verlängerte AC in keinem andern Punkte als in E treffen, d. h. es muss die verlängerte Diagonale durch den Durchschnittspunkt der Tangenten gehen. Hieraus folgt nun, dass auch die andere Diagonale verlängert durch den Durchschnittspunkt der an die Endpunkte der ersteren gezogenen Tangenten geht (A. 479, Z.).

Zweiter Fall. (Fig. 410.) Sind die Tangenten parallel, so muss die Diagonale AC ein Durchmesser sein (A. 19), folglich

$\angle ABC = \angle ADC = R$ (246)
AB : BC = AD : CD (Vorauss. und 203, Z. 2),

mithin $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ (198),
daher $\angle BAC = \angle CAD$
$\angle BCA = \angle ACD$,
folglich arc. AB = arc. AD (245),
mithin chord. AB = chord. AD (245, Z. 5),
folglich $\triangle ABF \cong \triangle ADF$ (45),
also $\angle AFB = \angle AFD = R$ (20),
mithin BD ‖ AE ‖ CG.

Da ferner AC ein Durchmesser ist, so muss AC verlängert durch den Durchschnittspunkt der an B und D gezogenen Tangenten gehen (250); sind hingegen diese letzteren parallel, so muss auch BD ein Durchmesser sein, und es ist, nach dem ähnlichen Beweise wie der eben geführte, AC parallel diesen Tangenten; w. z. b. w

Anmerkung. Dieser Satz ist die Umkehrung des vorhergehenden.

499. Zieht man vom Mittelpunkte eines Kreises nach einem beliebigen Punkte einer Sehne eine Gerade, so ist das Quadrat derselben und das Rechteck aus den beiden Abschnitten der Sehne zusammen so gross als das Quadrat des Radius.

Beweis. Man verlängere CD (Fig. 411.) nach beiden Seiten hin, bis sie den Umkreis in E und F schneidet, so wird der so

erhaltene Durchmesser EF durch die Sehne AB in zwei Stücke getheilt, von denen das eine $DE = CE + CD$

das andere $DF = CF - CD$

$= CE - CD.$

Nun ist: $AD . BD = (CE + CD)(CE - CD)$ (251)

$= CE^2 - CD^2$

oder: $CE^2 = CD^2 + AD . BD$; w. z. b. w.

Zusatz 1. Nimmt man den Punkt auf der Verlängerung einer Sehne, so ist das Quadrat der diesen Punkt mit dem Mittelpunkt des Kreises Verbindenden, vermindert um das Rechteck aus den beiden Abschnitten der Sehne, welche zwischen dem Endpunkte der Verlängerung und der Peripherie enthalten sind, gleich dem Quadrat des Radius.

Beweis. Es ist (Fig. 411.):

$$de = Cd + Ce$$

$$df = Cd - Ce$$

aber $Ad . Bd = de . df$ (256)

$$= (Cd + Ce)(Cd - Ce)$$

$$= Cd^2 - Ce^2$$

oder $Ce^2 = Cd^2 - Ad . Bd$; w. z. b. w.

Zusatz 2. Verbindet man daher beliebige Punkte beliebiger Sehnen mit dem Centro, so ist das Quadrat jeder dieser Verbindenden vermehrt um das Rechteck aus den zugehörigen Sehnenstücken von unveränderlicher Grösse, wie auch die Sehnen und die auf ihnen genommenen Punkte sich von einander unterscheiden mögen.

Beweis ist von selbst einleuchtend aus dem Hauptsatze; die constante Grösse ist das Quadrat des Radius.

Verbindet man den ersten und zweiten Zusatz, so erhält man:

Zusatz 3. Verbindet man beliebige Punkte beliebiger Sehnen oder deren Verlängerungen mit dem Centro, so ist die algebraische Summe des Quadrates jeder dieser Verbindenden und des Rechtecks aus den zugehörigen Sehnenstücken von unveränderlicher Grösse.

500. Verlängert man die Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks über ihre Fusspunkte hinaus um die Länge ihrer unteren Abschnitte, so liegen die Endpunkte dieser Verlängerungen im Umfange des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

Beweis. Es sei G (Fig. 412.) der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel des Dreiecks ABC; es sei ferner $HE = GE$,

FK = GF, DL = DG. Man verbinde die Dreiecksspitzen mit den auf beiden Seiten ihnen zunächst liegenden Endpunkten der Verlängerungen, so ist:

$\angle$BLA = $\angle$BGA (weil $\triangle$ADL $\cong$ $\triangle$ADG und $\triangle$BDL $\cong$ $\triangle$BDG (45)
= $\angle$BCA + $\angle$GAC + $\angle$GBC (38)

$\triangle$ADG $\sim$ $\triangle$GEC und $\triangle$BDG $\sim$ $\triangle$CFG (196), daher
$\angle$BCA = $\angle$BAG + $\angle$ABG, folglich:
$\angle$BLA = $\angle$BAC + $\angle$ABC, also auch:
$\angle$BLA + $\angle$BCA = $\angle$BAC + $\angle$ABC + $\angle$BCA
= 2R (38)

mithin ALBC ein Kreisviereck (244, Z. 4); es muss also der um das Dreieck ABC beschriebene Kreis auch durch den Punkt L gehen. Ganz auf ähnliche Weise zeigt man, dass ABCK, sowie ACHB Kreisvierecke seien, mithin also der um $\triangle$ABC beschriebene Kreis auch durch die Punkte K und H gehe; w. z. b. w.

Anmerkung. Der Satz gilt auch für recht- und stumpfwinkelige Dreiecke.

Ist $\triangle$BAC in A rechtwinkelig, so werden die unteren Abschnitte der Kathetenperpendikel gleich Null, während der untere Abschnitt des Hypotenusenperpendikels gleich diesem wird; da nun BC der Durchmesser des um $\triangle$ABC beschriebenen Kreises, AH aber von diesem Durchmesser unter rechten Winkeln halbirt wird, so liegt auch der andere Endpunkt H von AH im Umkreise (A. 425).

Ist $\triangle$BAC stumpfwinkelig in A (Fig. 413.), so hat man die unteren Abschnitte der den beiden kleineren Dreiecksseiten zugehörigen Höhenperpendikel nicht um ihre eigene Länge zu verlängern, sondern auf ihnen von ihrem Fusspunkte aus abzuschneiden; es ist also FG = LF und GD = DK; das zur grössten Seite BC gehörige Höhenperpendikel hingegen wird um die Länge seines unteren Abschnittes GE verlängert, so dass also GE = EH. Zieht man nun BL, AL, CK, AK, BH, CH, so ist nur zu beweisen, dass AKCB, ALBC und ABHC Kreisvierecke seien.

$\triangle$AGD $\sim$ $\triangle$BAE (196),
folglich $\angle$ABC = $\angle$AGD
= $\angle$AKD, weil $\triangle$GAD $\cong$ $\triangle$KAD (45)
aber $\angle$AKD + $\angle$AKC = 2R (20),
mithin $\angle$ABC + $\angle$AKC = 2R,

folglich AKCB ein Kreisviereck (241, Z. 4); ähnlich ist der Beweis, dass auch ALBC ein Kreisviereck.

Ferner ist $\triangle DAC \sim \triangle FAB$ (196)
folglich $\angle ACD = \angle DBG$
$\angle ADC = \angle GDB = R$
mithin $\angle DAC = \angle BGC$
$\angle DAC + \angle BAC = 2R$ (30), also auch
1) $\angle BGC + \angle BAC = 2R.$
Nun ist $\triangle BGE \cong \triangle BHE$, $\triangle CGE \cong \triangle CHG$ (45)
daher $\angle BGE = \angle BHE$
$\angle CGE = \angle CHE,$
also $\angle BGE + \angle CGE = \angle BHE + \angle CHE$
oder $\angle BGC = \angle BHC.$ Aus 1 hat man nun:
$\angle BHC + \angle BAC = 2R,$
mithin ABHC ein Kreisviereck; es geht also der um $\triangle ABC$ beschriebene Kreis durch die Punkte L, K und H; w. z. b. w.

501. Zieht man von dem einen Endpunkte (A Fig. 414.) einer beliebigen Sehne (AB) einen Durchmesser und fällt auf diesen aus dem andern Endpunkte (B) der Sehne eine Senkrechte, so ist die Sehne die mittlere Proportionale zwischen jeder beliebigen andern Sehne (AE), die von jenem ersten Endpunkte ausläuft, und dem Stück (AG) derselben, das zwischen eben diesem Endpunkte und jener Senkrechten liegt.

Beweis. Man ziehe BD und BE, so ist:
$\angle DBA = R$ (216), daher
$\angle BDA + \angle BAD = R$ (38)
$= \angle BAD + \angle ABF$ (38), weil $\angle BFA = R$ (V.)
folglich $\angle BDA = \angle ABF$ oder $\angle ABG$
$\angle BDA = \angle BEA$ (244, Z. 1)
daher $\angle ABG = \angle BEA$
$\angle BAG = \angle BAE$
folglich $\triangle ABG \sim \triangle AEB$ (196), demnach ist:
$AE : AB = AB : AG$; w. z. b. w.

502. Halbirt man die sechs Winkel, welche die drei Paare zugeordneter Seiten eines Kreisvierecks bilden, so erhält man in den Halbirenden zwei Ternionen von Parallellinien.

Beweis. Es sei (Fig. 415.) $\angle DFH = \angle HFC$ und $\angle AGK = \angle KGB$, ferner $\angle AES = \angle SEZ$, so sollen die Halbirenden FH, KL, ES einander parallel sein; ebenso $MN \parallel EP \parallel FR$, die andere Ternion von Winkelhalbirenden.

Es ist $\angle DFH = \angle HFC$ ⎫
und $\angle AGK = \angle BGK$ ⎭ (V.)

folglich: arc. DH — arc. AJ = arc. HL + arc. CL — arc. BK — arc. KJ (A. 440), ferner:

arc. CL + arc. AJ + arc. KJ = arc. DH + arc. HL + arc. BK (A. 440, Z. 2). Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man:

arc. KJ = 2 arc. HL — arc. KJ

mithin arc. KJ = arc. HL,

folglich HF ∥ KL (245, Z. 4).

Auf ähnliche Weise zeigt man, dass auch:

MN ∥ EP.

Da aber die Winkel um G durch KL und MN halbirt sind,

so ist: KL ⊥ MN (A. 8)

mithin auch: FH ⊥ EP (25)

und da ES ⊥ EP (A. 8),

so ist FH ∥ ES ∥ KL (26, Z. 1).

Aus ähnlichen Gründen ist auch:

EP ∥ FR ∥ MN; w. z. b. w.

503. Ist der Umfang eines Kreises in eine beliebige gerade Anzahl gleicher Theile getheilt, und man verbindet ein Paar gegenüberliegender Theilpunkte mittelst eines Durchmessers, von den übrigen Theilpunkten aber je zwei solche, welche gleich weit von demselben Scheitel dieses Durchmessers entfernt sind, durch Sehnen, so verhält sich der Durchmesser zur Summe aller dieser Sehnen, wie die beiden Sehnen (AD, AF Fig. 416.) zu einander, welche man von einem Scheitel des Durchmessers nach dem nächsten und nach dem fernsten Theilpunkte zieht.

Beweis. Man ziehe EJ, FH, BG, BF, so ist, da nach Voraussetzung die Bogen zwischen den Theilpunkten einander gleich

sind, AD ∥ EJ ∥ FH ∥ BG ⎫
und DJ ∥ EH ∥ FG ⎭ (245, Z. 4).

Hieraus folgt für sämmtliche Dreiecke wie AKD, KLJ u. s. w. die Gleichheit ihrer Winkel, und da ferner

arc. AD = arc. AJ

und arc. DEFB = arc. JHGB (V.)

so ist: $\angle AKD = R$ (A. 427),

die genannten Dreiecke sind also auch rechtwinkelig; da ferner

auch $\triangle AFB$ in F rechtwinkelig (246) und $\angle FAB = \angle ADJ = \angle ADK$ (244, Z. 1), so ist:

$\triangle AFB \sim \triangle AKD \sim \triangle KLJ \sim \triangle CLE \sim \triangle CMH \sim \triangle MFN \sim \triangle NGB$ [(196).

Demnach verhält sich:

$$\begin{aligned} AK:DK &= KL:KJ \\ &= CL:CE \\ &= CM:CH \\ &= MN:NF \\ &= BN:NG, \end{aligned}$$

folglich: $AK:DK = KL + CL + CM + MN + BN : KJ + CE + CH + NF + NG$ (158 und 148),

oder: $AK:BK = DK:KJ + EH + FG$ (151)

$AK + BK : AK = DK + KJ + EH + FG : DK$ (153),

d. i. $AB : AK = DJ + EH + FG : DK$, oder

$$\begin{aligned} AB : DJ + EH + FG &= AK:DK \text{ (151)} \\ &= BF:AF \end{aligned}$$

aber arc. BF = arc. AD (V.)

mithin chord. BF = chord. AD (245, Z. 5), folglich:

$AB : DJ + EH + FG = AD : AF$; w. z. b. w.

504. Zieht man von einem der Durchschnittspunkte (A Fig. 117.) zweier sich schneidender Kreise in jedem derselhen eine Selne (AB, AD) so, dass ein Stück derselben (AE, AF) Sehne des andern Kreises ist, so verhalten sich die beiden übrigen Stücke (EB, FD) wie die beiden Sehnen (GE, GD) des einen oder des andern Kreises (GB, GF), die von dem andern Durchschnittspunkte (G) nach den Endpunkten der vorher genannten Sehnen gezogen werden.

Beweis. $\angle GBA + \angle GFA = 2R$ (275)

$= \angle GFA + \angle GFD$ (20)

folglich: $\angle GBA = \angle GFD$

oder: $\angle GBE = \angle GFD$.

Ebenso ist: $\angle GEB = \angle GDF$,

daher $\triangle GBE \sim \triangle GDF$ (196, Anmk. 1).

Es verhält sich also: $EB : FD = GE : GD$

$= GB : GF$; w. z. b. w.

505. In jedem spitzwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat jeder Seite vermehrt um das Quadrat vom obern Abschnitte des zu ihr gehörigen Höhenperpendikels gleich dem Quadrate des Durchmessers des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

Beweis. Man ziehe den Durchmesser BD (Fig. 418.), ziehe AD, CD. Fällt man ferner die Höhenperpendikel AF und CE und zieht BG, so ist BG der obere Abschnitt des zu AC gehörigen Höhenperpendikels (A. 22). Nun ist

$$\angle BAD = \angle BCD = R \ (246),$$

daher $\left.\begin{array}{l} AD \parallel CE \\ CD \parallel AF \end{array}\right\}$ (26, Z. 1)

also: AGCD ein Parallelogramm,

folglich: $\left.\begin{array}{l} AD = CG \\ CD = AG \end{array}\right\}$ (56)

Aber: $BD^2 = AB^2 + AD^2$ (87)

$= AB^2 + CG^2$

ebenso: $BD^2 = BC^2 + AG^2$.

Ferner ist: $AC^2 = AE^2 + CE^2$ (87)

$= AG^2 - GE^2 + BC^2 - BE^2$ (87, Z. 2)

$BG^2 = BE^2 + GE^2$ (87),

mithin $AC^2 + BG^2 = AG^2 + BC^2$

$= BD^2$; w. z. b. w.

Anmerkung. Unser Satz gilt auch für recht- und stumpfwinkelige Dreiecke.

Im rechtwinkeligen Dreieck ist die Hypotenuse ein Durchmesser; der obere Abschnitt des Hypotenusenperpendikels ist gleich Null und das Quadrat der Hypotenuse sich selbst gleich; die obern Abschnitte der Kathetenperpendikel werden zu den ganzen Katheten, man erhält also den pythagoräischen Lehrsatz.

Für das stumpfwinkelige Dreieck ist der Beweis analog dem für das spitzwinkelige.

506. Die durch die Halbirungspunkte der obern Abschnitte der Winkelhalbirenden eines Dreiecks gezogenen Senkrechten bilden bei hinreichender Verlängerung ein Dreieck, dessen äusserer (d. h. um dasselbe beschriebener) Kreis von gleicher Grösse mit dem Kreise um das Urdreieck ist.

Beweis. Man verlängere (Fig. 419.) die Winkelhalbirenden, bis sie die Peripherie des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises in D, E, F schneiden, verbinde alsdann diese Durchschnittspunkte untereinander, so hat man nur zu beweisen, dass die Seiten des so entstandenen Dreiecks DEF die oberen Abschnitte der Winkelhalbirenden unter rechten Winkeln halbiren. Man ziehe CE, CD, so ist: $\angle BED = \angle BAD$ (244, Z. 1)

$= \angle DAC$ (V.)

$= \angle DEC$ (244, Z. 1),

oder 1) $\angle GED = \angle DEC$

$\angle ADE = \angle ABE$ (244, Z. 1)

$= \angle EBC$ (V.)

$= \angle EDC$ (244, Z. 1)

oder 2) $\angle GDE = \angle EDC$. Aus 1 und 2 hat man:

$\triangle GDE \cong \triangle CDE$ (46)

daher $GE = CE$

und da: $\angle GEH = \angle CEH$,

so ist: $DE \perp CG$ } (A. 35, a).

und $GH = CH = \frac{1}{2}CG$ }

Auf analoge Weise zeigt man, dass auch FE und FD die obern Abschnitte der Winkelhalbirenden unter rechten Winkeln halbiren; w. z. b. w.

507. Die Gerade, welche den Halbirungspunkt einer Seite eines Dreiecks mit dem Halbirungspunkte des obern Abschnittes von dem zu dieser Seite gehörigen Höhenperpendikel verbindet, ist gleich dem Halbmesser des äussern Kreises.

Beweis. Es sei (Fig. 420.) E der Halbirungspunkt des obern Abschnittes des zur Seite BC gehörigen Höhenperpendikels, D der Halbirungspunkt der Seite BC. Man ziehe den Durchmesser AKJ, den Radius BK und die Gerade DK, so ist $\angle BDK = R$ (248). Ferner ist nun:

$AJ^2 = BC^2 + AG^2$ (A. 505)

$AJ^2 = 4AK^2$ }

$BC^2 = 4BD^2$ } (74, Z. 1),

$AG^2 = 4AE^2$ }

folglich $AK^2 = BD^2 + AE^2$

$AK^2 = BK^2$ (als Quadrat von Radien),

also $BK^2 = BD^2 + AE^2$

$BK^2 = BD^2 + DK^2$ (87),

mithin $AE = DK$,

aber auch $AE \parallel DK$ (26, Z. 1)

folglich $ED = AK$ (54), w. z. b. w.

Anmerkung. Der vorstehende Satz kann als eine Verallgemeinerung angesehen werden von der Eigenschaft des rechtwinkeligen Dreiecks (89, Z.), dass die Gerade, welche den Halbirungspunkt der Hypotenuse mit der Spitze des rechten Winkels verbindet, gleich der halben Hypotenuse, oder, da die Hypotenuse gleich dem Durchmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises, gleich dem Radius desselben ist. Für das zur Hypotenuse gehörige Höhenperpendikel wird

der obere Abschnitt gleich Null, und die in Rede stehende Verbindende wird sonach der Radius selbst. In Betreff der Katheten aber ist jede der obere Abschnitt des zur andern Kathete gehörigen Hohenperpendikels; den Halbirungspunkt des oberen Abschnittes des Hohenperpendikels mit dem Halbirungspunkt der zugehörigen Seite verbinden heisst also weiter nichts, als: die Halbirungspunkte der Katheten verbinden, und diese Gerade ist gleich der halben Hypotenuse (A. 31, Z.) oder gleich dem Radius des umschriebenen Kreises.

508. Die drei Kreise, die so beschaffen, dass die Kreislinie eines jeden durch zwei Ecken und den Höhendurchschnitt desselben Dreiecks geht, sind unter einander und dem um das Dreieck beschriebenen Kreise gleich.

Beweis. Verbindet man (Fig. 421.) die Mittelpunkte der drei Kreise durch gerade Linien, so halbirt eine jede dieser Axen die gemeinschaftliche Sehne je zweier zugehöriger Kreise unter rechten Winkeln (264); daher ist, wenn man noch FH, EH, DH zieht:

$$\left.\begin{aligned}\angle OFH &= \angle BAH\\ \angle ODH &= \angle BCH\end{aligned}\right\}\ (244 \text{ und } 245,\ Z.\ 1)$$

aber: $\angle BAH = \angle BCH$ (38, Z. 2),

weil $\angle MHA = \angle JHC$ (22), $\angle AMH = \angle HJC = R$ (Constr.),

folglich $\angle OFH = \angle ODH$

mithin $FH = DH$; auf ganz ähnliche Weise zeigt man, dass auch: 1) $EH = FH = DH$.

Zieht man ferner die Axe GD eines der drei Kreise und des Kreises um $\triangle ABC$ und den Radius GB des letzteren, sowie den Radius DB des Kreises D, so ist:

$\angle OBJ = \angle JDL$ (38, Z. 2),

weil $\angle OJB = \angle LJD$ (22), $\angle BOJ = \angle JLD = R$ (Constr.),

$\angle BCH = \angle BDO$ (244 und 245. Z. 1).

Aber $\angle OBJ$ oder $\angle HBJ = \angle HAK$ (38, Z. 2),

weil $\angle BHJ = \angle AHK$ (22), $\angle BJH = \angle HKA = R$ (Constr.),

$\angle BCH = \angle BAH$, wie dies weiter oben bereits gezeigt; $\angle JDL + \angle BDO = \angle HAK + \angle BAH$,

oder $\angle BDG = \angle BAC$

und da $\angle BAC = \angle BGL$ (244 und 245, Z. 1) $= \angle BGD$

so ist: $\angle BDG = \angle BGD$

folglich $GB = DB$ (52) $= DH$ (als Radien),

mithin wegen 1:

$GB = DH = EH = FH$; w. z. b. w.

509. Zieht man von einem Punkte (A Fig. 422.) ausserhalb eines Kreises an denselben zwei Berührende und zwei Schneidende, von denen die eine durch den Mittelpunkt geht, und verbindet den Durchschnittspunkt (H) zwischen dieser und der Berührungssehne (BD) mit den Punkten (F, G), in denen die andere Schneidende (AF) dem Umkreise begegnet, so wird der von diesen beiden Geraden gebildete Winkel (FHG) durch die Berührungssehne halbirt.

Beweis. Da AE ein Durchmesser, AB und AD Tangenten,

so ist: $\angle BAH = \angle HAD$ (250)

folglich $\triangle BAH \cong \triangle DAH$ (45)

daher $\angle BHA = \angle DHA = R$ (20).

Man fälle $GN \perp AE$ und $FM \perp AE$, so ist:

$BD \parallel GN \parallel FM$ (26, Z. 1),

folglich: $\left.\begin{array}{l} AF : KF = AM : HM \\ AG : GK = AN : NH \end{array}\right\}$ (195)

aber: $AF : KF = AG : GK$ (260),

mithin $AM : HM = AN : NH$.

Es ist also AM in N und H harmonisch getheilt; es sind demnach, wenn man noch GM zieht, AGF, GN, GH und GM Harmonikalen (A. 332). Verlängert man nun FM und GH, bis sie sich in J schneiden, so ist: $FM = MJ$ (A. 333), weil $FM \parallel BD$ und AH, GH, BD, FH Harmonikalen. Da aber FJ mit dem einen Endpunkte F im Umkreise liegt und vom Durchmesser LE unter rechten Winkeln halbirt wird, so liegt auch der andere Endpunkt J im Umkreise (A. 425). Nun ist

$\triangle HFM \cong \triangle HJM$ (45)

folglich $\angle HFJ = \angle HJF$

aber $\left.\begin{array}{l} \angle HFJ = \angle BHF \\ \angle HJF = \angle GHF \end{array}\right\}$ (24), weil $FJ \parallel BD$,

mithin $\angle BHF = \angle GHF = \frac{1}{2} \angle FHG$; w. z. b. w.

510. Bleibt Alles wie beim vorigen Satze, so ist auch das Rechteck aus den beiden Geraden, welche den Halbirungspunkt der Mittelsehne mit den Durchschnittspunkten der anderen Schneidenden verbinden, gleich dem Quadrate der halben Mittelsehne. (Fig. 422.)

Beweis. Man ziehe GE und FL, so ist:

$\angle BHG + \angle GHL = \angle BHF + \angle FHE = R$ (S. Bew. zu A. 509)

$\angle BHG = \angle BHF$ (A. 509),

mithin $\angle GHL = \angle FHE$
und daher auch: $\angle FHL = \angle GHE$
arc. FE = arc. EJ (248)
mithin: $\angle FLH = \angle EGH$ (244, Z. 1),
folglich ist: $\triangle FHL \sim \triangle EHG$ (196, Anmk.)
also: $FH : EH = HL : GH$
und daher: $FH : GH = EH : HL$ (203, Z. 3)
$= BH^2$ (252); w. z. b. w.

511. Zieht man in einem Kreise einen seiner Durchmesser und von einem beliebigen Punkte desselben, der nicht der Mittelpunkt ist, nach dem Umkreise Linienpaare, so dass jedes zusammengehörige Paar in demselben Halbkreise liegt und mit dem Durchmesser gleiche Winkel bildet, so haben die Geraden, welche die Endpunkte dieser Linienpaare verbinden, bei hinreichender Verlängerung stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt. (Fig. 422.)

Beweis. Man ziehe durch den auf dem Durchmesser LE genommenen Punkt H die Sehne $BD \perp LE$, an die Endpunkte B und D derselben Tangenten, die man bis zu ihrem Durchschnitt in A verlängert, so ist dieser Durchschnittspunkt der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt aller der in Rede stehenden Geraden, wie GF, welche die Endpunkte des Linienpaares GH und FH, das mit dem Durchmesser LE die gleichen Winkel GHL und FHE bildet, verbindet. Zieht man demnach AG, so ist zu beweisen, dass AG und GF eine einzige gerade Linie sind. Wäre dies nicht der Fall, fiele die Verlängerung von AG nicht mit GF zusammen, sondern liefe etwa wie GZ, so ziehe man HZ, alsdann wäre:

$$\angle GHB = \angle BHZ \text{ (A. 509)}$$
$$\angle GHB + \angle GHL = \angle BHZ + \angle ZHE = R \text{ (Constr.)}$$

mithin: $\angle GHL = \angle ZHE$
aber: $\angle GHL = \angle FHE$ (V.)
folglich: $\angle ZHE = \angle FHE$, was nicht möglich; es muss also die Verlängerung GZ mit GF zusammenfallen, d. h. FGA eine einzige gerade Linie sein, oder, was auf dasselbe hinausläuft, die verlängerte FG muss durch den Punkt A gehen. Aehnlich ist der Beweis für jede andere Gerade, welche die Endpunkte oben näher bezeichneter Linienpaare verbindet; w. z. b. w.

512. Bleibt Alles wie bei den drei vorhergehenden Sätzen, und man zieht noch die Halbmesser (CF, CG) nach den Durch-

schnittspunkten (F, G) der zweiten Schneidenden, so bilden diese mit den von eben diesen Punkten nach dem Halbirungspunkte der Berührungssehne gezogenen Geraden Winkel (CFH, CGH), die nicht nur unter einander, sondern auch dem Winkel (FAE) gleich sind, welchen die beiden Schneidenden mit einander machen. (Fig. 422.)

Beweis. $\angle GHF = \angle HFJ + \angle HJF$ (38)

und da $\angle HFJ = \angle HJF$ (vgl. den Beweis zu A. 509),

so ist $\angle GHF = 2 \angle HJF$

$= \angle GCF$ (244)

oder $\angle GHO = \angle OCF$

$\angle GOH = \angle FOC$ (22)

mithin 1) $\angle CGH = \angle CFH$ (38, Z. 2).

Ferner ist $\angle FHE = \angle GHA$ (vergl. Beweis zu A. 510)

$\angle GHA + \angle GAH = \angle FGJ$ (38), daher auch:

$\angle FHE + \angle GAH = \angle FGJ$

$= \angle FCE$ (244 u. 245, Z. 1)

$= \angle FHE + \angle HFC$ (38), mithin:

$\angle GAH$ oder $\angle FAE = \angle HFC$

$= \angle HGC$ (wegen 1); w. z. b. w.

513. Zieht man durch den Halbirungspunkt (H Fig. 422.) eines Halbmessers (CL) eine Sehne (BD) unter rechten Winkeln, an deren Endpunkte Tangenten, die man bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert, und von diesem Durchschnittspunkte (A) eine beliebige den Kreis schneidende Gerade (AF), so ist das innerhalb des Kreises liegende Stück derselben (FG) doppelt so gross, als der Unterschied der beiden Geraden (FH, GH), welche die Endpunkte dieses Stücks mit dem Halbirungspunkte des Halbmessers verbinden.

Beweis. Es ist

$\angle FAH = \angle CGH$ (A. 512)

und da $\angle GHL = \angle FHC$ (vergl. Beweis zu A. 510),

so ist auch: $\angle FHA = \angle GHC$

mithin $\triangle AHF \sim \triangle GHC$ (196, Anmk.),

daher $AF : FH = GC : CH$

$CH = \frac{1}{2} CG$ (V.)

folglich 1) $FH = \frac{1}{2} AF$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AHF und GHC hat man ferner:

$AH : FH = GH : CH$,

oder: $AH : GH = FH : CH$

$\angle GHA = \angle FHC$ (wie schon oben gezeigt),

folglich: $\triangle AGH \sim \triangle FCH$ (198)

daher: $AG : GH = FC : CH$

$CH = \frac{1}{2}FC$ (V.),

folglich 2) $GH = \frac{1}{2}AG$.

Aus 1 und 2 hat man nun:

$FH - GH = \frac{1}{2}(AF - AG)$

$= \frac{1}{2}FG$; w. z. b. w.

Durch Verallgemeinerung des vorstehenden Satzes erhält man folgenden Satz:

513b. Theilt man den Halbmesser eines Kreises in zwei Stücke, die sich zu einander verhalten, wie die Zahlen m und n (also $CH : HL = m : n$ Fig. 422.), zieht durch den Theilpunkt eine Sehne unter rechten Winkeln, an deren Endpunkte Tangenten, die man bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert, so verhält sich jede Sehne, die so gezogen wird, dass sie, verlängert, durch den Durchschnittspunkt der Tangenten geht, zu dem Unterschiede der beiden Geraden, welche ihre Endpunkte mit dem Theilpunkte des Halbmessers verbinden, wie $m + n : m$.

Beweis. $CH : HL = m : n$ (V.)

daher $CH + HL : CH = m + n : m$ (153)

oder 1) $CL : CH = m + n : m$.

Aus dem Beweise zu A. 513 hat man aber:

$AF : FH = GC : CH$

$= m + n : m$ (weil $GC = CL$ als Radien)

und $AG : GH = FC : CH$

$= m + n : m$ (weil $FC = CL$ als Radien)

also auch $AF : FH = AG : GH$

oder $AF : AG = FH : GH$ (151)

daher: $AF - AG : AF = FH - GH : FH$ (153)

oder: $AF - AG : FH - GH = AF : FH$ (151),

d. i. $FG : FH - GH = AF : FH$. Aus 1 hat man demnach:

$FG : FH - GH = m + n : m$; w. z. b. w.

514. Zieht man durch den Halbirungspunkt (D Fig. 423.) einer Sehne (AB) eine zweite (EF), die nicht senkrecht auf ihr steht, und an die Endpunkte dieser zweiten Tangenten, so sind die durch diese letzteren begrenzten Verlängerungen (AG, BH) der ersten Sehne von gleicher Länge.

Beweis. Man ziehe CG, CH, CE, CF, so ist

$\angle GEK = R$ (243)

$= \angle KDC$ (248)

$\angle EKG = \angle DKC$ (22),

folglich $\triangle EKG \sim \triangle CDK$ (196, Anmk.),

daher $GK : EK = CK : DK$

mithin 1) GCDE ein Kreisviereck (251, Z. 4).

Ferner ist $\angle CDH = R$ (248)

$= \angle CFH$ (243),

also $\angle CDH + \angle CFH = 2R$,

daher $\angle DCF + \angle DHF = 2R$ (104),

folglich 2) CDHF ein Kreisviereck (244, Z. 4).

Ferner ist $CE = CF$ (als Radien),

folglich 3) $\angle CEF = \angle CFE$ (51).

Aus 1, 2 und 3 hat man nun

$\angle HGC = \angle CEF$ (244, Z. 1)

$= \angle CFE$

$= \angle CHG$ (244, Z. 1),

mithin $CG = CH$ (52),

folglich $GD = DH$ (51, Z. 4)

$AD = BD$ (Vorauss.),

daher $GD - AD = DH - BD$

oder $AG = BH$; w. z. b. w.

515. Verbindet man die Fusspunkte der Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks und beschreibt um das so entstandene Dreieck einen Kreis, so geht dessen Umkreis durch die Halbirungspunkte der Seiten des Urdreiecks (Fig. 424.).

Beweis. Es seien D, E, F die Fusspunkte der Höhenperpendikel des Dreiecks ABC und H, J, K die Punkte, in welchen der um das Dreieck DEF beschriebene Kreis die Seiten des Urdreiecks schneidet. Man ziehe HJ, KJ, HK, so ist

$\triangle BFC \sim \triangle BDA$ (196),

daher 1) $AB : BC = BD : BF$.

Ferner ist $BH \cdot BF = BD \cdot BJ$ (256),

folglich $BH : BJ = BD : BF$ (203, Z. 2).

Aus 1 hat man nun $AB : BC = BH : BJ$,

mithin $HJ \parallel AC$ (195). Auf ähnliche Weise

zeigt man, dass $KJ \parallel AB$

$HK \parallel BC$.

Es sind also AHJK, BHKJ, CKHJ Parallelogramme,
folglich $KJ = AH = BH = \frac{1}{2}AB$,
ebenso $BJ = CJ = \frac{1}{2}BC$
und $CK = AK = \frac{1}{2}AC$; w. z. b. w.

516. Die Peripherie des im vorigen Satze genannten Kreises geht auch durch die Halbirungspunkte der obern Abschnitte von den Höhenperpendikeln des Urdreiecks (Fig. 424.).

Beweis. Man ziehe LF, so sind BFGD und CEGD Kreisvierecke (244, Z. 4), folglich

$$\left.\begin{array}{l}\angle FBG = \angle FDG \\ \angle ECG = \angle EDG\end{array}\right\} (244, Z. 1),$$

aber $\angle FBG = \angle ECG$ (38, Z. 2),
weil $\angle FGB = \angle EGC$ (22), $\angle BFG = \angle GEC = R$ (V.),
folglich $\angle FDG = \angle EDG = \angle FBG$
oder $2\angle FBL = \angle FDE$
$= \angle FLG$ (244, Z. 1)
$= \angle FBL + \angle BFL$ (38),
mithin $\angle FBL = \angle BFL$,
daher $BL = FL$ (52)
$\angle BFL + \angle LFG = R$ (Vorauss.)
$= \angle FBL + \angle FGL$ (38),
folglich $\angle LFG = \angle FGL$,
mithin $GL = FL$
$= BL = \frac{1}{2}BG$.

Ganz ähnlich ist der Beweis für die beiden andern in Rede stehenden Durchschnittspunkte.

517. Der Halbmesser des genannten Kreises ist halb so gross als der Radius vom äussern Kreise des Urdreiecks (Fig. 424.).

Beweis. Man ziehe den Radius MC des Kreises um $\triangle ABC$, ziehe ferner HN, so ist $\angle HFN = R$ (Constr.),
folglich HN ein Durchmesser des Kreises um $\triangle DEF$ (244, Z. 3)
aber $BH = AH$ (A. 515)
$GN = CN$ (A. 516),
mithin $HN = CM$ (A. 507),
Da aber HN der Durchmesser des in Rede stehenden Kreises, so ist sein Radius $= \frac{1}{2}CM$; w. z. b. w.

518. Fällt man in einem spitzwinkeligen Dreieck die Höhenperpendikel, verbindet deren Fusspunkte und beschreibt um jedes der vier Dreiecke, in welche dadurch das Urdreieck zer-

legt wird, einen Kreis, so liegen die Mittelpunkte der drei zu den äusseren Dreiecken gehörigen Kreise in der Peripherie des Kreises, der um das mittlere beschrieben ist.

Beweis. (Fig. 424.) Es ist BDGF ein Kreisviereck (Constr. und 244, Z. 4), BL = FL = GL (A. 516 u. A. 61).
Mithin ist L der Mittelpunkt des um BDGF beschriebenen Kreises (249, Z.), also auch der Mittelpunkt des um $\triangle$ BFD beschriebenen, als desselben.

Aehnlich ist der Beweis für die um die Dreiecke DEC und AFE beschriebenen Kreise; w. z. b. w.

519. Der Mittelpunkt (O, Fig. 424.) des Kreises, dessen Peripherie durch die Fusspunkte der Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks geht, liegt mit dem Mittelpunkte (M) des zu letzterem gehörigen äusseren Kreises und dessen Höhendurchschnitt (G) in einer geraden Linie, und zwar in gleicher Entfernung von ihnen.

Beweis. Man ziehe MH, GH, MN, so ist
MH $\perp$ AB (248),
mithin MH $\parallel$ CF (26, Z. 1)
MH = CN (vergl. Beweis zu A. 507)
= GN (A. 516),
folglich GHMN ein Parallelogramm (54 und 55),
daher ist 1) GH = MN (56),
2) $\angle$ GHO = $\angle$ ONM.

Da ferner HN ein Durchmesser des um $\triangle$ DEF beschriebenen Kreises, weil $\angle$ HFN = R (244, Z. 3), O aber dessen Mittelpunkt, so ist 3) HO = NO (als Radien);
zieht man nun GO und MO, so ist wegen 1, 2 und 3
$\triangle$ HGO $\cong$ $\triangle$ MNO (45),
folglich GO = MO,
d. h. die Punkte G und M liegen gleichweit vom Punkte O entfernt,
und $\angle$ HOG = $\angle$ MON
$\angle$ HOG + $\angle$ GON = 2R (20), mithin
$\angle$ MON + $\angle$ GON = 2R,
folglich GOM eine gerade Linie (21); w. z. b. w.

520. Ist in einem Dreieck (ABC, Fig. 425.) das Quadrat einer Seite (AC) gleich dem Quadrat einer zweiten (BC) vermehrt um das Rechteck aus eben dieser zweiten und der dritten, so ist der von der ersten und dritten Seite eingeschlossene Winkel

(BAC) dreimal so klein als der der dritten Seite gegenüberliegende Aussenwinkel (BCD).

Beweis 1. Man beschreibe aus C als Mittelpunkt mit AC als Halbmesser einen Kreis, verlängere BC nach beiden Seiten, AB und AC über B und C, bis sie den Umkreis treffen; ziehe CH, errichte auf GE in B die Senkrechte BF und ziehe CF, so ist

$$AC^2 = CF^2$$
$$= BC^2 + BF^2 \ (87)$$
$$= BC^2 + BE . BG \ (252)$$
$$= BC^2 + AB . BH \ (251)$$
$$AC^2 = BC^2 + AB . BC \text{ (Vorauss.)},$$

folglich $BH = BC$,

mithin $\angle HCB = \angle CHB$ (51),

und da $CH = AC$ (als Radien,,

so ist $\angle CHB = \angle BAC = \angle HCB$

oder $3\angle BAC = \angle BAC + \angle HCB + \angle CHB$

$= \angle BAC + \angle ABC$ (38)

$= \angle BCD$ (38); w. z. b. w.

Einfacher ist folgender

Beweis 2. $AC^2 = BC^2 + BC . AB$ (Vorauss.)

$AC^2 = BC^2 + BH . AB$ (A. 499),

folglich $BH = BC$ u. s. w. wie oben.

521. Zieht man von einem der Scheitel (A) eines Kreisdurchmessers (AB, Fig. 426.) ein Paar beliebiger Sehnen (AD, AE), verbindet ihre Endpunkte, verlängert diese Gerade bis zum Durchschnitt mit der an den andern Scheitel (B) des genannten Durchmessers gezogenen Tangente (in F) und zieht von diesem Punkte (F) eine Gerade durch den Mittelpunkt, so sind die Stücke (CJ, CK) derselben, welche zwischen dem Mittelpunkte und den beiden zuerst genannten Sehnen liegen, von gleicher Länge.

Beweis. Man ziehe EO ∥ FH, fälle CL ⊥ DE, ziehe BL, BE, LM, so ist $\angle CLP = R$ (Constr.)

$= \angle PBF$ (243)

$\angle LPC = \angle BPF$ (22),

folglich $\triangle LPC \sim \triangle BFP$ (196),

daher $CP : LP = FP : BP$,

mithin CLBF ein Kreisviereck (251, Z. 2), folglich

$\angle LCF + \angle LBC + \angle CBF = 2R$ (275)

$\angle CBF = R$,

also $\angle LCF + \angle LBC = R$

$= \angle LCF + \angle LFC$ (38),

mithin $\angle LBC = \angle LFC$

$= \angle LEO$ (24)

oder $\angle LBP = \angle PEM$

$\angle LPB = \angle MPE$ (22),

folglich $\triangle LBP \sim \triangle MEP$ (196, Anmk.),

daher $LP : BP = MP : EP$

mithin BLME ein Kreisviereck (251, Z. 2),

folglich $\angle MLE = \angle MBE$ (244, Z. 1)

$= \angle ABE$

$= \angle ADE$ (244, Z. 1)

mithin $ML \parallel AD$ (26),

und da $DL = LE$ (248),

so ist auch 1) $OM = ME$ (63, Z.).

Da ferner $OE \parallel HF$,

so ist $\triangle AMO \sim \triangle ACK$ und $\triangle AME \sim \triangle AEJ$ (24 und 196),

daher $OM : KC = AM : AC$

$ME : CJ = AM : AC$,

also auch $OM : KC = ME : CJ$,

wegen 1 mithin $KC = CJ$; w. z. b. w.

522. Die Fusspunkte der drei Senkrechten, die man aus einem beliebigen Punkte der Peripherie des um ein Dreieck beschriebenen Kreises auf dessen Seiten fällt, liegen in einer geraden Linie.

Beweis. Man fälle aus D (Fig. 427.) $DG \perp AC$, $DF \perp BC$, ziehe GF, verlängere GF, bis sie die verlängerte AB in E schneidet, ziehe DE, so ist der Satz offenbar erwiesen, wenn dargethan wird, dass $DE \perp AB$. Man ziehe BD und CD, so ist

$\angle ABD + \angle ACD = 2R$ (275)

$= \angle ABD + \angle EBD$ (20),

mithin 1) $\angle ACD = \angle EBD$.

Ferner ist $\angle DFH = \angle CGH = R$ (Constr.)

$\angle FHD = \angle GHC$ (22),

folglich $\triangle FHD \sim \triangle GHC$ (196, Anmk.),

daher $FH : DH = GH : CH$,

mithin CDFG ein Kreisviereck (251, Z. 2),
folglich $\angle GFD + \angle GCD = 2R$ (275)
$= \angle GFD + \angle EFD$ (20),
mithin $\angle GCD = \angle EFD$, und wegen 1 ist nun
auch $\angle EBD = \angle EFD$.
Hieraus folgt aus ähnlichen Gründen, wie so eben beim Viereck CDFG, dass BEDF ein Kreisviereck,
daher $\angle BED + \angle BFD = 2R$ (275),
aber $\angle BFD = R$ (Constr.),
mithin $\angle BED = R$,
also $DE \perp AB$; w. z. b. w.

523. Fällt man aus einer der Spitzen (D, Fig. 428.) eines Kreisvierecks, in welchem sich die Diagonalen unter rechten Winkeln schneiden, auf die von der Gegenecke (B) auslaufenden Seiten Senkrechte, so liegen nicht nur deren Fusspunkte mit dem Durchschnittspunkte der Diagonalen in einer geraden Linie, sondern es sind auch die zwischen den Diagonalen enthaltenen Stücke dieser Senkrechten einzeln gleich denjenigen Vierecksseiten, mit denen sie zwar von demselben Endpunkte der Diagonale auslaufen, aber auf verschiedenen Seiten derselben liegen (DH = DC, DJ = DA).

Beweis. Da $DE \perp AC$, $DG \perp BC$, $DF \perp AB$ (Constr.),
der Punkt D aber im Umfange des um $\triangle ABC$ beschriebenen Kreises liegt, so liegen die Fusspunkte G, E, F der Senkrechten in einer geraden Linie (A. 522) .... 1.
Ferner sind BGDF und CGDE Kreisvierecke (Constr. u. 244, Z. 4)
folglich $\angle BDF = \angle BGF$ (244, Z. 1),
oder $\angle EDH = \angle CGE$
$= \angle CDE$ (244, Z. 1),
und da $DE \perp CH$,
so ist 2) $CD = DH$ (A. 35, g).
Ferner ist $\angle DEJ = \angle BGD = R$ (Constr.)
$\angle JDE = \angle GDB$,
folglich $\angle DJE = \angle GBD$ (38, Z. 2)
oder $\angle DJA = \angle CBD$
$= \angle CAD$ (244, Z. 1),
folglich 3) $DJ = DA$ (52); w. z. b. w.

524. Wenn von zwei Sehnen (AD, AH, Fig. 429.), die beide von demselben Punkte (A) auslaufen, die eine (AH) den Supplementarbogen (DHB) der andern (AD) halbirt, so ist sie die mittlere Proportionale zwischen dem um die andere Sehne (AD) verlängerten Durchmesser und zwischen dem Radius.

Beweis. Man ziehe BD, so ist

$$\text{arc. } DH = \text{arc. } BH \text{ (Vorauss.)},$$

folglich $\angle DAN = \angle HAB$ (245)

$$\left.\begin{aligned}\angle ADN &= R\\ &= \angle AHB\end{aligned}\right\} (246),$$

mithin $\triangle ADN \sim \triangle AHB$ (196, Anmk.),

daher $AN : AD = AB : AH$,

also auch $AN^2 : AD^2 = AB^2 : AH^2$ (155, Z. 1),

aber $AN^2 : AD^2 = AB : \frac{1}{2}(AB + AD)$ (A. 471),

folglich $AB^2 : AH^2 = AB : \frac{1}{2}(AB + AD)$,

daher auch $AB : AH^2 = 1 : \frac{1}{2}(AB + AD)$,

mithin $\frac{1}{2}AB(AB + AD) = AH^2$ (150),

daher $AB + AD : AH = AH : \frac{1}{2}AB = AH : BC$; w. z. b. w.

Zusatz. Es ist $BH^2 = BC(BA - AD)$.

Beweis. Nach dem vorigen Beweise ist

$$AH^2 = \tfrac{1}{2}AB(AB + AD)$$
$$AH^2 = AB^2 - BH^2 \text{ (87, Z. 2)},$$

folglich

$$\begin{aligned} BH^2 &= AB^2 - \tfrac{1}{2}AB(AB + AD)\\ &= AB \,.\, AB - AB \,.\, \tfrac{1}{2}AB - AD \,.\, \tfrac{1}{2}AB\\ &= \tfrac{1}{2}AB \,.\, AB - \tfrac{1}{2}AB \,.\, AD\\ &= \tfrac{1}{2}AB(AB - AD)\\ &= BC(AB - AD).\end{aligned}$$

525. Schneidet man auf den beiderseitigen Verlängerungen eines Kreisdurchmessers zwei Stücke (EB, FD, Fig. 430.) von beliebiger aber gleicher Länge ab, zieht von einem der Durchschnittspunkte eine Tangente (BA), fällt aus dem Berührungspunkte eine Senkrechte (AG) auf den Durchmesser nnd nimmt $CH = CG$, so ist für jeden beliebigen Punkt (J) im Umkreise das Verhältniss seiner Entfernungen von dem einem Paare (B, D) der vier Punkte (B, D, G, H) gleich dem Verhältnisse der Entfernungen vom andern Paare (G, H).

Beweis. Man ziehe CJ, so ist

$$\angle GCJ = \angle BCJ$$
$$\angle GJC = \angle JBC \text{ (A. 512)},$$

folglich $\triangle GCJ \sim \triangle BCJ$ (196),
daher $GJ : CJ = BJ : BC$,
oder $BC : CJ = BJ : GJ$ (151, Anmk. 4),
und da $BC = CD$,
1) $CD : CJ = BJ : GJ$.

Man errichte nun auf BD in H die Senkrechte HK, ziehe DK, CK, AC, so ist
$CE = CF$ (als Radien)
$CG = CH$ (Constr.),
folglich $GE = HF$,
mithin $AG = HK$ (A. 437)
$AC = CK$ (als Radien)
$\angle AGC = \angle CHK = R$ (Constr.),
folglich $\triangle AGC \cong \triangle HKC$ (49, Anmk. 2),
daher $\angle ACB = \angle KCD$,
mithin auch $\triangle ABC \cong \triangle KCD$ (45),
also $\angle BAC = \angle CKD = R$,
folglich DK eine Tangente (243),
mithin $\angle CJH = \angle CDJ$ (A. 512)
$\angle JCH = \angle JCD$,
folglich $\triangle CJH \sim \triangle CDJ$ (196),
daher $CJ : HJ = CD : DJ$,
oder $DJ : HJ = CD : CJ$ (151, Anmk. 4).

Wegen 1 hat man nun
$BJ : GJ = DJ : HJ$,
oder $BJ : DJ = GJ : HJ$; w. z. b. w.

526. Schneiden sich in einem Kreisvierecke zwei zugeordnete Seiten unter rechten Winkeln, so liegt dieser Durchschnittspunkt mit dem Mittelpnnkte des Kreises und dem Mittelpunkte der mittleren Entfernungen (A. 325) in einer geraden Linie nnd zwar der letztere in gleicher Entfernung von den beiden andern (Fig. 431.).

Beweis. Es mögen sich die Diagonalen BD und AC unter rechten Winkeln schneiden. Man verbinde den Durchschnittspunkt E mit dem Mittelpunkte des Kreises durch die Gerade EF, die Halbirungspunkte H, J zweier Gegenseiten durch die Gerade HJ, ziehe EH, EJ, HF, FJ, so ist, wenn man noch HE bis K verlängert:

$\angle KED = \angle HEB$ (22)
$= \angle HBE$ (A. 61 und 51)
$= \angle ABD$
$= \angle ACD$ (244, Z. 1)
$= \angle ECD$
$\angle EDK = \angle EDC$
folglich $\angle EKD = \angle CED$ (38, Z. 2)
$= R$ (V.)
also $HK \perp CD$
$FJ \perp CD$ (248)
mithin $HE \parallel FJ$ (26, Z. 1).
Durch analogen Beweis findet man:
$HF \parallel EJ$.
Es ist also HEJF ein Parallelogramm,
folglich 1) $GE = GF$ (61).

Halbirt man ferner ein anderes Paar zugeordneter Seiten, AC, BD in L und M, zieht FL, FM, LM, so ist:
$LF \perp AC$ (248)
$BD \perp AC$ (V.)
folglich: $LF \parallel BD$ (26, Z, 1).
Ebenso ist: $FM \parallel AC$,
also: EMFL ein Parallelogramm.

Da sich aber die Diagonalen desselben gegenseitig halbiren (61) und nach 1 der Punkt G der Halbirungspunkt der Diagonale EF ist, so muss die andere Diagonale LM durch den Punkt G gehen. Die Geraden LM und HJ, welche die Halbirungspunkte zweier Paare zugeordneter Seiten verbinden, schneiden sich also im Punkte G, folglich ist

2) G der Mittelpunkt der mittleren Entfernungen von ABCD (A. 327). Aus 1 und 2 hat man daher:
die Punkte E, G, F in gerader Linie und
G gleich weit von E und F entfernt; w. z. b. w.

526b. Wenn in einem Kreisviereck der Durchschnittspunkt zweier zugeordneter Seiten mit dem Mittelpunkte des Kreises und dem Mittelpunkte der mittleren Entfernungen in einer geraden Linie liegt, und zwar so, dass letzterer gleich weit von den beiden andern entfernt ist, so schneiden sich die genannten Seiten unter rechten Winkeln.

Beweis. Es sei GE = GF (Fig. 431.) und G der Mittelpunkt der mittleren Entfernungen, so muss die Gerade LM, welche die Halbirungspunkte eines Paares zugeordneter Seiten, AC und BD, verbindet, durch den Punkt G gehen (A. 327). Man ziehe ferner FL und FM, so ist FL ⊥ AC, FM ⊥ BD (248),

folglich: EG = GM = GF = GL (A. 61).

Hieraus folgt △EGM ≅ △LGF und △EGL ≅ △GFM (45)

daher LF = EM und EL = FM,

also ELFM ein Parallelogramm (60) und da ∠ELF ein Rechter, so ist ELFM ein Rechteck (56, Z. 2), folglich ∠AED = R; w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz ist die Umkehrung des vorigen.

527. Schneiden sich in einem Kreisviereck ein Paar zugeordneter Seiten unter rechten Winkeln, so ist die Entfernung dieses ihres Durchschnittspunktes vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises gleich der Entfernung der Halbirungspunkte dieses Seitenpaares von einander. (Fig. 431.)

Beweis. Es ist LEMF ein Rechteck (vergl. Beweise zu A. 526 und 526[b]), folglich EF = LM (61, Z.); w. z. b. w.

528. Haben zwei Kreise eine solche gegenseitige Lage, dass die Peripherie eines von ihnen durch den Mittelpunkt des andern geht, und man zieht eine Gerade (ADEB Fig. 432.) so, dass sie beide Kreise schneidet und parallel mit deren Axe ist, so hat die Summe der beiden Segmente (AD, BE), welche nicht beiden Kreisen zugleich angehören, eine constante Grösse — sie ist dem Durchmesser des Kreises gleich, dessen Peripherie durch den Mittelpunkt des andern Kreises geht.

Beweis. Man fälle MK ⊥ AB und CL ⊥ AB, so ist: MK ∥ CL (26, Z. 1), folglich CLKM ein Rechteck,

mithin: CM = KL (56)

und 2CM = 2KL

= 2DK + 2DL

= 2DK + DL + BL (248)

= 2DK + DL + EL + EB

= KE + DK + BE

= AK + DK + BE (248)

= AD + BE; w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz kann als eine Erweiterung des 445. Satzes dieses Abschnittes angesehen werden; denn wenn beide Kreise gleich sind, so geht

die Peripherie eines jeden durch den Mittelpunkt des andern, und es wird AD = BE = dem Radius (vergleiche Beweis zu A. 445).

529. Schneiden sich zwei Kreise und werden beide von einer dritten Geraden (DEFGH Fig. 433.) geschnitten, so sind die vier Segmente (DE, EF, FG, GH), in welche diese Linie in ihren Durchschnittspunkten mit den Peripherieen beider Kreise und deren gemeinschaftlicher Sehne getheilt wird, immer so beschaffen, dass das Rechteck aus dem ersten und dritten gleich ist dem Rechteck aus dem zweiten und vierten ($DE_rFG = EF_rGH$).

Beweis. Es ist:

$$\left.\begin{array}{l} DF_rFG = AF_rFB \\ HF_rEF = AF_rFB \end{array}\right\} (251)$$

folglich 1) $DF_rFG = HF_rEF$.

Aber:

$$\left.\begin{array}{l} DF_rFG = DE_rFG + EF_rFG \\ HF_rEF = EF_rGH + EF_rFG \end{array}\right\} (72).$$

Wegen 1 hat man mithin:

$$DE_rFG = EF_rGH; \text{ w. z. b. w.}$$

530. Zieht man in einem Kreise (ADBK Fig. 434.) eine beliebige Sehne (AB) und beschreibt von dem Halbirungspunkte (K) eines der zu ihr gehörigen Bogen (AEB) einen zweiten Kreis, der die gezogene Sehne mit dem ersteren gemeinschaftlich hat, so ist derjenige Bogen (AJOB) dieses zweiten Kreises, welcher nicht auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Sehne mit dem Mittelpunkte liegt, der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller inneren Kreise für die Dreiecke, welche in dem Abschnitt (ADSBA) des ersten Kreises stehen, der nicht den Mittelpunkt des zweiten enthält.

Beweis. Man beschreibe in den Abschnitt ADSBA das beliebige Dreieck ABS, verbinde die Spitze S mit dem Halbirungspunkte K des Bogens AEB durch die Gerade SK, den Durchschnittspunkt O dieser Geraden und der Peripherie des zweiten Kreises mit der Spitze A durch die Gerade AO, den Punkt J endlich, in welchem die Seite AS eben jenen Umkreis schneidet, mit der Spitze B durch die Gerade BJ, so ist:

arc. AK = arc. BK (V.)

folglich: $\angle ASK = \angle BSK$ (245)

oder $\angle JSL = \angle BSL$

SL = SL

$SJ = SB$ (A. 466)

mithin $\triangle JSL \cong \triangle BSL$ (45)

daher $JL = BL$

und: $\angle JLS = \angle BLS = R$ (20)

folglich: arc. OJ = arc. OB [(248) in Bezug auf Kreis K]

mithin: $\angle JAO = \angle BAO$ [(245) in Bezug auf Kreis M].

Es schneiden sich also die Winkelhalbirenden AO und SO des Dreiecks ABS in einem Punkte O, welcher auf dem Bogen AJOB liegt, und dieser Punkt ist demnach der Mittelpunkt des innern Kreises des Dreiecks ABS (272, Z. 1); w. z. b. w.

531. Zieht man in dem um ein Dreieck beschriebenen Kreise eine Sehne durch den Mittelpunkt (O Fig. 435.) des innern Kreises, so ist das Rechteck aus den beiden Segmenten, in welche dieser Punkt die Sehne theilt, doppelt so gross, als das Rechteck aus den Halbmessern der genannten Kreise.

Beweis. Man ziehe den Durchmesser DMG im umschriebenen Kreise aus dem Halbirungspunkte D des Bogens BDC; ziehe BG, BD; fälle aus dem Mittelpunkte des innern Kreises $OK \perp DG$, so ist: $DH \perp BC$ (A. 427); zieht man nun AO und verlängert sie, so muss diese Verlängerung den Punkt D treffen (A. 442). Man ziehe noch AG, so ist:

$\angle DAG = R$ (246)

$= \angle OKD$

daher $\triangle AGD \sim \triangle OKD$ (196)

folglich $DG : DA = DO : DK$

mithin $DG_r DK = DA_r DO$ (203, Z. 3)

oder 1) $DG_r KH + DG_r DH = DO_r OA + DO_q$ (72).

Da nun aber der Punkt O der Mittelpunkt des innern Kreises des Dreiecks ABC ist, dieser Punkt nach A. 530 auf einem Kreisbogen liegt, dessen Mittelpunkt der Halbirungspunkt des Bogens BDC und der BC gleichfalls zur Sehne hat, so sind DB und DO Halbmesser dieses Kreises, also

$DO = BD$

und $DO_q = BD_q = DG_r DH$ (87, Z. 1).

Wegen 1 hat man also:

2) $DG_r KH = DO_r OA$.

Fällt man $OP \perp BC$, so ist:

$KH = OP$ (56)

= dem Radius des innern Kreises,

$$DG = 2DM$$

also $DG_r KH = 2DM_r OP$, und aus 2 mithin:

$$DO_r OA = 2DM_r OP; \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz 1. Daher ist, wenn d die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise, R den Radius des äussern, r den des innern Kreises bezeichnet: $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Beweis. $OM_q + AO_r OD = DM_q$ (A. 499)

also $d^2 = R^2 - AO . OD$

$= R^2 - 2Rr$, w. z. b. w.

Zusatz 2. Daher ist bei jedem Dreiecke, in welchem die Mittelpunkte des äussern und inneren Kreises nicht zusammenfallen, der Halbmesser des äusseren grösser, als der Durchmesser des inneren.

Beweis. Aus Zusatz 1 hat man:

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

also auch $d^2 + r^2 = R^2 - 2Rr + r^2$,

folglich $\sqrt{d^2 + r^2} = R - r$

oder $r + \sqrt{d^2 + r^2} = R$.

Es ist aber $\sqrt{d^2 + r^2}$ die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, in welchem r eine Kathete, also kleiner als die Hypotenuse ist, folglich ist:

$$r + \sqrt{d^2 + r^2} > 2r$$

und mithin auch $R > 2r$, w. z. b. w.

532. Erklärung. Es ist bekannt und folgt unmittelbar aus Sätzen, die im ersten Abschnitte abgehandelt worden sind, dass für jedes Dreieck sich vier Kreise construiren lassen, von denen jeder alle drei Seiten des Dreiecks berührt. Einer derselben liegt immer ganz innerhalb des Dreiecks, er soll daher innerer Berührungskreis oder auch schlechthin innerer Kreis genannt werden; die drei übrigen liegen ganz ausserhalb des Dreiecks und führen daher mit Recht den Namen äusserer Berührungskreise; jeder derselben berührt nur eine Dreiecksseite selbst, die übrigen in ihren Verlängerungen, wir wollen ihn daher künftig den jener ersten Seite zugehörigen äusseren Berührungskreis nennen.

533. Zieht man in einem Kreise (AKBD Fig. 434.) eine beliebige Sehne (AB), beschreibt von dem Halbirungspunkte (K) eines der zu ihr gehörigen Bogen (AKB) als Mittelpunkt einen zweiten Kreis, der mit dem ersteren die gezogene Sehne ge-

meinschaftlich hat, so ist derjenige Bogen (ACFB) dieses zweiten Kreises, welcher mit dem Mittelpunkte auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Sehne liegt, der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller derjenigen äusseren Berührungskreise, die zu Dreiecken gehören, welche in dem Abschnitte (ADSBA) des ersten Kreises stehen, der den Mittelpunkt des zweiten nicht enthält, und zwar die der gemeinschaftlichen Seite (AB) zugehörigen äusseren Berührungskreise (A. 532) sind.

Beweis. Es sei ASB ein beliebiges über AB im Abschnitt ADSB beschriebenes Dreieck. Man ziehe SKC und CA (mit Beibehalt der in A. 530 angegebenen Construction), fälle $CQ \perp AB$, so ist SC die Halbirende des Winkels ASB }
AO „ „ „ „ BAS } (vgl. Bew. zu A. 530)

$AC \perp AO$ (Constr.), folglich:

AC die Halbirende des Aussenwinkels von $\angle BAS$ (A. 8, Z.).

Der auf dem Bogen ACFB liegende Punkt C ist demnach der Durchschnittspunkt der einen inneren Winkel, ASB, und die Nebenwinkel der beiden andern inneren Winkel des Dreiecks ABS halbirenden Geraden; er ist mithin gleich weit von der Seite AB und von den Verlängerungen der Seiten AS und BS entfernt (A. 28, Z. 1); folglich ist C der Mittelpunkt und CQ der Radius des der Seite AB zugehörigen äussern Berührungskreises des Dreiecks ABS, w. z. b. w.

534. Zieht man von dem Mittelpunkte eines der äusseren Berührungskreise eines Dreiecks eine Schneidende an den um das Dreieck beschriebenen Kreis, so ist das Rechteck aus der ganzen Linie und ihrem äusseren Segmente doppelt so gross, als das Rechteck aus den Halbmessern der genannten Kreise. (Fig. 434.)

Beweis. Unter Beibehalt der im vorigen Satze angegebenen Construction verbinde man noch den Mittelpunkt M des um $\triangle$ ABS beschriebenen Kreises mit dem Mittelpunkte K des zweiten Kreises durch die Gerade MK und mit dem Mittelpunkte C des zu AB gehörigen äusseren Berührungskreises des Dreiecks ABS durch die Gerade MC; verlängere CQ bis V, so ist:

$$CP_rCV = CP_rCQ + CP_rQU + CP_rUV \quad (72)$$

aber $CP_rQU = PQ_rUV$. (A. 529),

folglich $CP_rCV = CP_rCQ + CP_rUV + PQ_rUV$

$$= CP_rCQ + UV_rCQ \ (72)$$

$= (CP + UV) CQ$
$= 2CQ.KM$ (A. 528); w. z. b. w.

Zusatz. Daher ist, wenn d' die Entfernung beider Mittelpunkte und R den Radius des umschriebenen, r' aber den des äusseren Berührungskreises bezeichnet:

$$d'^2 = R^2 + 2Rr'.$$

Beweis. Es ist:

$CM^2 - CP . CV = MK^2$ (A. 499, Z. 1)

also: $d'^2 = R^2 + CP . CV$

$= R^2 + 2Rr'$; w. z. b. w.

535. Beschreibt man in denselben Kreisabschnitt eine beliebige Menge von Dreiecken und für jedes derselben sowohl seinen innern als den der gemeinschaftlichen Seite zugehörigen äussern Berührungskreis, so ist die Entfernung der beiden Mittelpunkte für alle diese zusammengehörige Kreispaare eine constante Grösse.

Beweis. Knüpfen wir unsere Betrachtungen zunächst an △ ABS (Fig. 434.), so geht aus den Beweisen zu A. 530 und 533 hervor, dass CKOS eine gerade Linie ist; dieselbe geht also durch den Mittelpunkt des innern Kreises des Dreiecks ABS, durch den Mittelpunkt des der Seite AB zugehörigen äusseren Berührungskreises, durch den Mittelpunkt des in A. 530 näher bezeichneten Kreises K, der die Seite AB zur Sehne hat, und endlich durch die der Seite AB gegenüberliegende Spitze S des Dreiecks ABS; da nun die zuerst genannten zwei Mittelpunkte auf der Peripherie des Kreises K liegen (A. 530 und A. 533) und zwar auf verschiedenen Seiten der Sehne AB, so ist ihre Entfernung CO gleich dem Durchmesser des Kreises K. Ein Gleiches gilt aus gleichen Gründen für jedes andere, △ ABS analog beschriebene Dreieck. Die constante Grösse für die Entfernung der beiden Mittelpunkte aller in Rede stehenden zusammengehörigen Kreispaare ist mithin der Durchmesser des Kreises K; w. z. b. w.

536. Der Berührungspunkt des innern Kreises eines Dreiecks mit einer der Seiten und der Berührungspunkt des eben dieser Seite zugehörigen äusseren Berührungskreises mit ihr sind gleich weit von den Endpunkten dieser Seite entfernt.

Beweis. Ausser der in den vorhergehenden Sätzen angegebenen Construction (Fig. 434.) ziehe man noch UO, verlängere MK bis Z und fälle OG ⊥ AB, so ist:

	1) AN = BN (264)
Ferner	KZ ⊥ AB (264),
folglich	KZ ∥ CU (26, Z. 1)
mithin:	CK : KO = UZ : ZO (196)
	CK = KO (als Radien),
also auch	2) UZ = ZO.
Nun ist:	∠CUO = R (246)
also:	UO ⊥ CV,
folglich:	AB ∥ UO (26, Z. 1)
und da auch	OG ∥ CV ∥ KZ
so sind	QUZN und NZOG Rechtecke
folglich:	UZ = QN, ZO = NG (56)
und wegen 2:	ON = NG,
daher wegen 1:	AQ = BG; w. z. b. w.

537. Die vier Mittelpunkte der Berührungskreise jedes Dreiecks haben eine solche gegenseitige Lage, dass das Quadrat der Entfernung irgend zweier von einander vermehrt um das Quadrat der Entfernung der beiden andern eine constante Grösse ist — nämlich gleich dem Quadrate vom doppelten Durchmesser des dem Dreieck zugehörigen äussern Kreises.

Beweis. Es sei DEF (Fig. 436.) ein spitzwinkeliges Dreieck; man fälle die Höhenperpendikel und verbinde deren Fusspunkte durch gerade Linien, so werden die inneren Winkel des so entstandenen Dreiecks ABC durch die Höhenperpendikel, die Aussenwinkel aber durch die Seiten des Dreiecks DEF halbirt; denn es sind GBDC, GAEC und GAFB Kreisvierecke (244, Z. 4), folglich:

folglich:	∠BDG = ∠BCG, ∠AEG = ∠ACG (244, Z. 1)
aber:	∠BDG = ∠AEG (38, Z. 2),
weil ∠DBG = ∠GAE = R und ∠BGD = ∠AGE (22)	
mithin:	∠BCG = ∠ACG.
Ebenso ist auch:	∠ABG = ∠CBG
und	∠BAG = ∠CAG.

Da ferner DA ⊥ EF und DA den Winkel BAC halbirt, so halbirt EF den Nebenwinkel von BAC (A. 8, Z.); ein Gleiches gilt von den Seiten DF und DE in Betreff der beiden andern Aussenwinkel des Dreiecks ABC.

Hieraus ergibt sich, dass der Punkt G der Mittelpunkt des innern Kreises des Dreiecks ABC ist (272, Z. 1); die Spitzen des Dreiecks DEF aber sind die Mittelpunkte der äussern Berührungskreise des Dreiecks ABC (A. 28, Z. 1).

Bezeichnet man nun die Durchmesser der um die Dreiecke DEF und ABC beschriebenen Kreise bezüglich mit D und D', so

ist: $D = 2D'$ (A. 517)

also $D^2 = (2D')^2$

aber: $D^2 = GF^2 + DE^2 = DG^2 + FE^2 = GE^2 + FD^2$ (A. 505)

folglich: $GF^2 + DE^2 = DG^2 + FE^2 = GE^2 + FD^2 = (2D')^2$;

w. z. b. w.

538. Hat man ein beliebiges Dreieck und beschreibt drei Kreise so, dass jeder durch zwei seiner Ecken und den Mittelpunkt seines innern Kreises geht, so

1) liegen die Mittelpunkte derselben im Umfange des zum Dreiecke gehörigen äussern Kreises;
2) die Quadrate der drei Halbmesser zusammen sind gleichflächig dem Rechtecke aus dem Radius des äussern Kreises und dem Ueberschuss der Summe der Halbmesser der drei äusseren Berührungskreise über das Dreifache vom Halbmesser des innern. (Fig. 437.)

Beweis. 1. Man errichte in den Halbirungspunkten der oberen Abschnitte der Winkelhalbirenden des Dreiecks DEF Senkrechte und verlängere sie bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt, so liegen diese Durchschnittspunkte a, b, c auf der Peripherie des zu △DEF gehörigen äusseren Kreises (A. 506); diese Punkte sind aber die Mittelpunkte der Kreise, von denen jeder durch zwei Ecken und den Mittelpunkt des innern Kreises des Dreiecks DEF geht; dann zieht man auch durch die Anfangspunkte der Winkelhalbirenden, d. h. durch die Ecken des Dreiecks DEF Senkrechte und verlängert sie bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt, so wissen wir aus dem Beweise des vorigen Satzes, dass die Winkelhalbirenden hinreichend verlängert durch die entsprechenden Ecken des so entstandenen Dreiecks ABC gehen. Nun ist

$Pc \parallel EC$ (26, Z. 1)

also: $GP : PE = Gc : cC$ (196)

aber $GP = PE$ (Constr.)

folglich: $Gc = cC$,

und da $\angle GEC = R$ (Constr.)
so ist: $Gc = cC = cE$ (A. 61).

Der aus c mit cG als Radius beschriebene Kreis geht mithin durch die Punkte G, E und C, und da $\angle GEC + \angle GDC = 2R$, so muss jener Kreis auch durch den Punkt D gehen (244, Z. 4), woraus wieder folgt, dass die auf GD im Halbirungspunkte Q errichtete Senkrechte den Mittelpunkt c trifft. Ein ähnlicher Beweis gilt auch für die Punkte a und b. Es hat demnach jede Winkelhalbirende eines Dreiecks mit den auf den beiden andern Winkelhalbirenden in den Halbirungspunkten ihrer oberen Abschnitte errichteten Senkrechten einen gemeinschaftlichen, auf der Peripherie des zum Dreieck gehörigen äussern Kreises liegenden Durchschnittspunkt, der der Mittelpunkt eines Kreises ist, dessen Peripherie durch den Mittelpunkt des innern Kreises des Dreiecks und durch zwei seiner Ecken geht.

2. Die Punkte A, B und C sind die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise des Dreiecks DEF (A. 533); denn aus dem Beweise zu 1 wissen wir, dass:

$$\text{chord. } cE = \tfrac{1}{2}GC$$
$$= \text{chord. } cD$$

also $\text{arc. } cE = \text{arc. } cD$ (245, Z. 5).

Der Punkt G ist der Mittelpunkt des inneren Kreises des Dreiecks DEF (272, Z. 1).

Fällt man daher $AJ \perp FE$, $BM \perp FD$, $CN \perp DE$, $GH \perp FE$, so sind diese Senkrechten die Halbmesser der entsprechenden Kreise; verbindet man ferner den Mittelpunkt S des zu dem Dreieck DEF gehörigen äussern Kreises mit dem Mittelpunkte G seines innern Kreises, sowie mit den Mittelpunkten A und a durch die Geraden SG, SA, Sa und bezeichnet den Halbmesser des Kreises S mit R, den Halbmesser des Kreises G mit r, die Radien der Kreise a, b, c bezüglich mit r_1, r_2, r_3, die Radien der Kreise A, B, C bezüglich mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, so ist:

$$R^2 + r_1{}^2 = \tfrac{1}{2}(AS^2 + GS^2) \quad (93)$$

also 1) $$r_1{}^2 = \tfrac{1}{2}(AS^2 + GS^2) - R^2$$

$$AS^2 = R^2 + 2R\varrho_1 \quad (A. 534, Z.)$$

$$GS^2 = R^2 - 2Rr \quad (A. 531, Z. 1), \text{ folglich:}$$

$$\tfrac{1}{2}(AS^2 + GS^2) = R^2 + R\varrho_1 - Rr, \text{ und wegen 1 ist:}$$

$$r_1{}^2 = R\varrho_1 - Rr$$
$$= R(\varrho_1 - r).$$

Auf ähnliche Art zeigt man, dass:

$$r_2^2 = R(\varrho_2 - r)$$
$$r_3^2 = R(\varrho_3 - r).$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = R(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - 3r);$$ w. z. b. w.

539. Verbindet man den Mittelpunkt des innern Kreises eines Dreiecks mit dem Berührungspunkte einer der Seiten und verlängert diese Gerade über den letzten Punkt hinaus, bis sie zum zweitenmal die Peripherie des Kreises schneidet, welcher durch die Endpunkte der genannten Seite und den genannten Mittelpunkt geht, so ist diese Verlängerung gleich dem Halbmesser des eben dieser Seite zugehörigen äusseren Berührungskreises. (Fig. 434.)

Beweis. Es soll GF = CQ sein. Mit Beibehalt der in A. 536 angegebenen Construction ist:

BG = AQ (A. 536)

folglich: GF = QC (A. 437); w. z. b. w.

540. Zieht man in den drei äussern Berührungskreisen eines Dreiecks die Halbmesser nach den Berührungspunkten der ihnen zugehörigen Seiten, so schneiden sich dieselben bei hinreichender Verlängerung in einem und demselben Punkte, in demjenigen nämlich, der gleich weit von den drei genannten Mittelpunkten entfernt ist. (Fig. 437.)

Beweis. Führt man die in A. 537 angedeutete Construction aus, so weiss man aus dem Beweise des angeführten Satzes, dass die Ecken des spitzwinkeligen Dreiecks ABC die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise des Dreiecks DEF, die Höhenperpendikel des erstern die Halbirungslinien der innern Winkel des letztern sind und die Seiten des erstern die Aussenwinkel des letztern halbiren, dass der Höhendurchschnitt G der Mittelpunkt des innern Kreises des Dreiecks DEF ist. Nun sei der Punkt K derjenige, der gleich weit von den Ecken des Dreiecks ABC entfernt ist. Man ziehe AK, BK, CK, so hat man offenbar nur zu beweisen, dass diese Geraden, nöthigenfalls verlängert, die entsprechenden Seiten des Dreiecks DEF unter rechten Winkeln schneiden.

Es ist: $\angle FAO = \angle GAE$ (A. 72)
$= \angle GFE$ (244, Z. 1)

aber $\angle GFE + \angle EFA = R$ (A. 8), folglich:
$\angle FAO + \angle EFA = R$

oder: $\angle FAJ + \angle JFA = R$
mithin: $\angle FJA = R$ (38, Z. 2)
also $AJ \perp FE$.
Ganz ähnlich ist der Beweis, dass auch:
$BK \perp FD$
$CK \perp DE$; w. z. b. w.

541. Jedes Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks wird in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte mit den beiden andern in zwei solche Segmente getheilt, dass das Rechteck aus ihnen doppelt so gross ist, als das Rechteck aus dem Halbmesser des äussern Kreises und dem Halbmesser des Kreises, der in das durch die Fusspunkte der genannten Höhenperpendikel bestimmte Dreieck beschrieben wird. (Fig. 438.)

Beweis. Es sei $\triangle ABC$ spitzwinkelig, so ist der Höhendurchschnitt O der Mittelpunkt des innern Kreises des Dreiecks DEF (vergl. Beweis zu A. 537), die Senkrechte OK also der Radius dieses Kreises. Man ziehe den Durchmesser BMG, ferner CG und AG, so ist: $\angle BAG = \angle BCG = R$ (246)
also $AG \perp AB$
$CF \perp AB$ (Constr.)
daher: $AG \parallel CF$
ebenso ist: $AD \parallel CG$
also AOCG ein Parallelogramm,
folglich 1) $CG = AO$.
Ferner ist $\angle GBC = \angle GAC$ (244, Z. 1)
$= \angle ECO$ (24)
$= \angle EDO$ (244, Z. 1),
weil OEDC ein Kreisviereck (Constr. und 244. Z. 4)
$\angle EDO = \angle KDO$ (A. 322),
folglich $\angle GBC = \angle KDO$
$\angle GCB = \angle OKD = R$
mithin: $\triangle DOK \sim \triangle BGC$ (196, Anmk.)
daher: $DO : KO = BG : CG$, und wegen 1 ist:
$DO : KO = BG : AO$
$= 2BM : AO$
mithin: $DO, AO = 2BM, KO$ (203, Z. 3); w. z. b. w.

In Betreff der beiden andern Höhenperpendikel ist der Beweis analog dem obigen; oder kürzer durch die Aehnlichkeit

der Dreiecke BOD und AOE, so wie BOF und COE, woraus unmittelbar folgt: $DO_rAO = OE^rBO = FO_rCO = 2BM_rKO$.

542. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Summe der Katheten um den Durchmesser des eingeschriebenen Kreises grösser als die Hypotenuse.

Beweis. Es sei $\triangle BAC$ (Fig. 439.) in A rechtwinkelig; man fälle vom Mittelpunkte D des innern Kreises Senkrechte auf die Seiten, so sind dieselben Radien des Kreises und ihre Fusspunkte die Berührungspunkte der Seiten, mithin ist

$$\left.\begin{array}{l} BE = BG \\ CF = CG \end{array}\right\} (259, Z. 2),$$

also 1) $BE + CF = BC$.
Ferner ist AEDF ein Rechteck,
und da $AE = AF$ (259, Z. 2),
so ist AEDF ein Quadrat (56, Z. 2),
folglich $AE + AF = DE + DF$. Addirt man dies zu 1, so erhält man $AB + AC = BC + DE + DF$
$= BC + D$, wenn D den Durchmesser bezeichnet; w. z. b. w.

543. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist

1) der Halbmesser des einer Kathete zngehörigen äussern Berührungskreises kleiner als die Kathete selbst nnd zwar um den Halbmesser des innern Kreises;
2) dagegen ist der Radius des der Hypotenuse zugehörigen äussern Berührungskreises nm eben diesen innern Halbmesser grösser als die Hypotennse selbst, und daher
3) der Radius des der Hypotenuse zugehörigen äussern Berührungskreises so gross als die Halbmesser der drei übrigen Berührungskreise zusammen.

Beweis. I. Es sei $\triangle DEF$ (Fig. 437.) in D rechtwinkelig. Ausser der in A. 538 angegebenen Construction fälle man noch $GV \perp DE$ und $GU \perp DF$, so sind A, B, C die Mittelpunkte und AJ, BM, CN die entsprechenden Radien der äussern Berührungskreise, G der Mittelpnnkt des innern Kreises des Dreiecks DEF und $GH = GU = GV$ die Halbmesser desselben (vergl. Beweis zu A. 538). Nun ist GECD ein Kreisviereck (Constr. u. 244, Z. 4),
mithin $\angle GCE = \angle GDE$ (244, Z. 1),
es ist aber GVDM ein Quadrat (s. Beweis zu A. 542),
daher $\angle GDE = \frac{1}{2}R$,

also auch $\angle GCE = \frac{1}{2}R$

$\angle GCE + \angle EGC = R$ (38),

folglich $\angle EGC = \angle ECG$,

mithin $GE = CE$

$GV = DV$ (als Seite des Quadrats)

$= EN$ (A. 536),

folglich $\triangle GVE \cong \triangle ENC$ (49),

daher $CN = EV$,

und folglich $CN + GV = EV + DV$

$= DE$. Nach analogem Beweise ist ebenso

$BM + GU = DF$.

II. Man ziehe $FL \parallel BE$, so ist

$FJ = HE$ (A. 536)

$\angle LFJ = \angle HEG$ (24).

$\angle LJF = \angle EHG = R$,

folglich $\triangle LFJ \cong \triangle EGH$ (46),

daher $LJ = GH$

und $FL = GE$

$= CE$ (aus dem Bew. zu 1)

$\angle FAL = \angle EAG$ (A. 72)

$= \angle EFC$ (244, Z. 1)

$\angle AFL = \angle FBG$ (24)

$= \angle FDG$ (244, Z. 1)

$= \angle GDE$ (Constr.)

$= \angle FCE$ (244, Z. 1),

folglich $\triangle FAL \cong \triangle CFE$ (46),

mithin $AL = EF$

und daher $AL + LJ = EF + GH$

oder $AJ = EF + GH$.

III. Es ist nach I

$CN + GH = DE$

$BM + GH = DF$,

folglich $CN + BM + 2GH = DE + DF$

$= EF + 2GH$ (A. 542)

$= AJ + GH$ (nach II dieses Bew.),

mithin $AJ = CN + BM + GH$; w. z. b. w.

544. Ist ein in einen Kres beschriebenes Sechseck so beschaffen, dass eine der Diagonalen, welche zwei Gegenecken verbinden, mit den ihr gegenüberliegenden Gegenseiten einen gemein-

schaftlichen Durchschnittspunkt hat, so liegen folgende Durchschnittspunkte in gerader Linie:

1) von den beiden übrigen Diagonalen, welche Gegenecken verbinden;
2) von je zwei solchen Diagonalen, die von den Endpunkten der in Rede stehenden auslaufen und auf derselben Seite derselben liegen;
3) von je zwei Seiten, die von den Endpunkten der in Rede stehenden Diagonale auslaufen und auf derselben Seite von ihr liegen, endlich
4) von den beiden Diagonalen, die zwar keine Gegenecken verbinden, aber auch keinen Endpunkt mit der in Rede stehenden Diagonale gemeinschaftlich haben.

Beweis. Es sei ABCDEF (Fig. 440.) das Sechseck, dessen die Gegenecken C und F verbindende Diagonale CF sich mit den ihr gegenüberliegenden Seiten AB und DE, hinreichend verlängert, in einem Punkte G schneidet. Man ziehe von diesem Punkte G die Tangenten GJ und GH an den Kreis und ziehe die Berührungssehne HJ, so werden GB in A und Q, GC in F und R, GD in E und S harmonisch getheilt (260). Die genannten drei Geraden laufen aber von einem Punkte aus; verbindet man daher von einer jeden den zweiten Theilpunkt (vom gemeinschaftlichen Theilpunkte G, als ersten, an gerechnet) mit dem vierten der andern und die beiden dritten, so wie von je zweien jener Geraden die gleichnamigen Theilpunkte, so schneiden sich je drei von diesen Verbindenden in einem Punkte (A. 337 und A. 336); nämlich:

1) AD, BE, QS oder HJ in K,
2) BF, CA, QR oder HJ in L
DF, CF, RS oder HJ in M,
3) AF, CB, QR oder HJ in N
FE, CD, RS oder HJ in O,
4) AE, BD, QS oder HJ in P.

Da nun die dritten Theilpunkte von GB, GC, GD, nämlich Q, R, S, auf der Berührungssehne HJ liegen, so müssen auch die sechs Durchschnittspunkte auf HJ oder ihrer Verlängerung, also in gerader Linie liegen; w. z. b. w.

545. Hat man ein beliebiges Dreieck (ABC, Fig. 441.) und beschreibt drei Kreise so, dass jeder eine Dreiecksseite zur Sehne und eine zweite zur Tangente hat, nämlich der erste

Kreis die erste Seite zur Sehne und die zweite zur Tangente, der zweite die zweite Seite zur Sehne und die dritte zur Tangente, der dritte endlich die dritte Seite zur Sehne und die erste zur Tangente, so haben diese drei Kreise stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Beweis. Man beschreibe zuvörderst den Kreis S, welcher die Seite AB zur Sehne nnd die Seite BC zur Tangente, so wie den Kreis T, welcher die Seite BC zur Sehne und die Seite AC zur Tangente hat. Diese beiden Kreise schneiden sich also in B und G. Man ziehe nun BG, AG, CG, errichte auf AG in G und auf AC in C Senkrechte und verlängere sie, bis sie sich in N schneiden, ziehe AN, so ist

$\angle AUG = \angle CUN$ (22)

$\angle AGU = \angle UCN = R$ (Constr.),

mithin $\triangle AGU \sim \triangle CNU$ (196, Anmk.),

daher $GU : CU = AU : NU$,

folglich AGCN ein Kreisviereck (251, Z. 2).

Da nun $\angle ACN = R$, so muss AN ein Durchmesser des um AGCN beschriebenen Kreises sein (246); beschreibt man also aus dem Halbirungspunkte R mit AR als Halbmessser einen Kreis, so geht derselbe durch die Punkte A, C, G, d. h. er hat die dritte Seite AC zur Sehne und mit den beiden andern Kreisen den Punkt G als gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt; es bleibt demnach nur zu beweisen übrig, dass er die erste Seite AB zur Tangente hat.

Es ist $\angle ANG = \angle ACG$ (244, Z. 1)

$= \angle GBC$
$= \angle GAB$ (247),

aber $\angle ANG + \angle GAN = R$ (38, Z. 2), folglich auch

$\angle BAG + \angle GAN = R$.

Es steht also auf dem Durchmesser AN in seinem Endpunkte A die Seite AB senkrecht, folglich ist AB eine Tangente des Kreises R (242); w. z. b. w.

Anmerkung. Da man den ersten Kreis auch so construiren könnte, dass er die erste Dreiecksseite zur Sehne, und nicht die zweite, sondern die letzte zur Tangente hatte, und demgemass die beiden andern Kreise, so sieht man, dass für jedes Dreieck zwei Ternionen von Kreisen unter den genannten Bedingungen sich construiren lassen.

546. Zieht man in einem Dreiecke die Transversalen (AD, BE, CF, Fig. 441.), welche durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt (G) unserer drei Kreise gehen, so werden

1) durch sie die Dreieckswinkel so getheilt, dass drei dieser Stücke von gleicher Grösse sind ($\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$),
2) die Transversalen selbst schneiden sich unter Winkeln, welche einzeln den Dreieckswinkeln gleich sind.

Beweis. 1. $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$ (247);
2. $\angle BGD = \angle ABG + \angle BAG$ (38)
$= \angle ABG + \angle CBE$ (247)
$= \angle ABC$; auf ähnliche Weise wird
gezeigt, dass auch $\angle CGD = \angle BAC$
und $\angle CGE = \angle ACB$; w. z. b. w.

Anmerkung. Will man die drei gleichen Winkel in Worten, unabhängig von einer Figur, bezeichnen, so sind es

drei gleiche Winkel, die eine solche gegenseitige Lage haben, dass ein Schenkel des ersten durch den Scheitel des zweiten, ein Schenkel des zweiten durch den Scheitel des dritten, ein Schenkel des dritten durch den Scheitel des ersten geht und die drei andern Schenkel sich in einem Punkte schneiden.

Dass diese Winkel spitz sein müssen, ist einleuchtend, da sie, als Theile dreier Dreieckswinkel, zusammen kleiner sein müssen als 180°. Das Maximum eines jeden ist 30°, in welchem Falle das Dreieck gleichseitig, und die Transversalen, welche die gleichen Stücke von den Dreieckswinkeln abschneiden, mit den Hohenperpendikeln zusammenfallen.

547. Zieht man von einem beliebigen Punkte (K, Fig. 441.) im Umfange eines unserer drei Kreise zwei Sehnen nach den beiden dieser Peripherie angehörigen Dreiecksspitzen (A, B) und verlängert dieselben, bis sie die Peripherieen der beiden andern Kreise zum zweiten Mal schneiden, so liegen diese letztern Durchschnittspunkte (L, M) stets in gerader Linie mit der dritten Dreiecksspitze (C), und das so entstandene Dreieck (KLM) ist dem Urdreieck ähnlich.

Beweis. Man ziehe CM und CL, so ist
1. $\angle MCG + \angle MAG = 2R$ (275)
$= \angle MAG + \angle KAG$ (20),
folglich $\angle MCG = \angle KAG$
$\angle KAG + \angle KBG = 2R$ (275)
$= \angle KBG + \angle GBL$ (20),
folglich $\angle KAG = \angle GBL$,
daher auch $\angle MCG = \angle GBL$,
$\angle GBL + \angle GCL = 2R$ (275),

mithin $\angle MCG + \angle GCL = 2R$,
folglich liegen die Punkte L und M mit C in gerader Linie (21).

2. $\angle BLC + \angle BGC = 2R$ (275)
$= \angle BGC + \angle CGE$ (20),

folglich $\angle BLC = \angle CGE$
$\angle CGE = \angle ACB$ (A. 546, 2),
mithin $\angle BLC$ oder $\angle KLM = \angle ACB$.
Ganz ähnlich ist der Beweis, dass
$\angle KML = \angle BAC$
und $\angle LKM = \angle ABC$,
mithin $\triangle KLM \sim \triangle ABC$ (196); w. z. b. w.

548. Die Winkel (KAB, LBC, MCA), welche die Seiten des neuen Dreiecks (KLM) mit denen des Urdreiecks bilden, sind von gleicher Grösse, und mithin auch die Winkel untereinander gleich, welche die Seiten des neuen Dreiecks mit den Transversalen bilden ($\angle KAD = \angle LBE = \angle MCF$) (Fig. 441.).

Beweis. Wir wissen aus Beweis zu A. 547, 1, dass
$\angle KAB + \angle BAG = \angle LBC + \angle CBG = \angle MCA + \angle ACG$
oder $\angle KAD = \angle LBE = \angle MCF$
$\angle BAG = \angle CBG = \angle ACG$ (A. 546, 1),
folglich $\angle KAB = \angle LBC = \angle MCA$; w. z. b. w.

549. Umgekehrt, zieht man durch die Ecken des Urdreiecks gerade Linien so, dass sie auf gleichmässige Weise gleiche Winkel mit den Seiten des Dreiecks bilden ($\angle KAB = \angle LBC = \angle MCA$, Fig. 441.), so bilden sie, bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert, ein dem Urdreieck ähnliches Dreieck, dessen Spitzen einzeln auf den Peripherieen unserer drei Kreise liegen.

Beweis. Man ziehe BK, so ist

1. $\angle KAB = \angle LBC$ (Vorauss.)
$\angle BAG = \angle CBG$ (A. 546, 1),
folglich $\angle KAB + \angle BAG = \angle LBC + \angle CBG$
oder $\angle KAG = \angle LBG$
$\angle KAG + \angle KBG = 2R$ (275),
mithin $\angle LBG + \angle KBG = 2R$,
folglich ist KBL eine einzige gerade Linie (21).
Zieht man ferner CL und AM, so erhält man durch Beweise, die dem eben geführten analog sind, dass auch
LCM und KAM gerade Linien sind;

es liegen also die Ecken des Dreiecks KLM einzeln auf den Peripherieen der Kreise.

2. Dass △KLM ∾ △ABC, wird ganz ebenso bewiesen, wie in A. 547, 2; w. z. b. w.

550. Beschreibt man für irgend eines der Dreiecke, die man auf die im Vorigen angegebene Weise erhält, wie z. B. KLM (Fig. 441.), drei Kreise, welche zu ihm in derselben Beziehung stehen, wie die Kreise des Urdreiecks zu diesem, d. h. also, dass der erste die erste Seite zur Sehne und die zweite zur Tangente u. s. w. hat, so haben auch diese drei Kreise denselben gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt (G), wie die drei Kreise des Urdreiecks.

Beweis. Man ziehe GM, GL, GK, so ist
∠GAC = ∠GML (244, Z. 1)
∠GCA = ∠GLM (247),
folglich △GAC ∾ △GML (196).
Ebenso ist △GAB = △GMK,
daher AC : ML = GA : GM = GC : GL,
und GA : GM = GB : GK,
also AC : ML = GA : GM = GC : GL = GB : GK,
aber △ABC ∾ △KLM (A. 547, 2),
folglich ist der Punkt G ein Aehnlichkeitspunkt für diese beiden Dreiecke (A. 372), daher müssen sich die drei Kreise, welche zum Dreieck KLM in derselben Beziehung stehen, wie die Kreise des Urdreiecks zu diesem, ebenfalls in dem Punkte G schneiden; w. z. b. w.

Zusatz. Daher haben alle die unendlich vielen untereinander und dem Urdreiecke ähnlichen Dreiecke, deren Seiten durch die Ecken des Urdreiecks gehen, und deren Spitzen auf den Umfängen unserer drei Kreise liegen, den Durchschnittspunkt (G) dieser letztern zum gemeinschaftlichen Aehnlichkeitspunkt.

Beweis ist in dem des Hauptsatzes enthalten.

551. Das grösste unter allen diesen, im vorigen Satze näher bezeichneten Dreiecken ist dasjenige, dessen Seiten einzeln senkrecht auf den Transversalen stehen, die durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt unserer drei Kreise gehen (Fig. 441.).

Beweis. Es sei HJN ein beliebiges der im vorigen Satze näher bezeichneten Dreiecke und KLM ein eben solches, dessen Seiten einzeln senkrecht auf den Transversalen stehen, die durch den Punkt G gehen, so ist GM ein Durchmesser (246), daher

$$GM > GN \text{ (250, Z. 1)}$$

also auch $GM_q > GN_q$.

Nun ist $\triangle KLM \sim \triangle HJN$ (A. 547, 2) und der Punkt G ist der gemeinschaftliche Aehnlichkeitspunkt dieser beiden Dreiecke (A. 550, Z.); folglich:

$$KM : HN = GM : GN$$

daher auch: $KM_q : HN_q = GM_q : GN_q$ (155, Z. 1)

$KM_q : HN_q = \triangle KLM : \triangle HJN$ (205)

also: $\triangle KLM : \triangle HJN = GM_q : GN_q$

aber $GM_q > GN_q$

mithin $\triangle KLM > \triangle HJN$ (149); w. z. b. w.

552. Dieses grösste Dreieck ist so gross als das Urdreieck und dasjenige (HJN), dessen Seiten einzeln senkrecht auf den Seiten des Urdreiecks stehen, zusammen.

Beweis. Man ziehe GJ, so ist,

weil $\angle GCL = \angle ACJ = R$ (V.)

$GL = CJ$ (246), als Durchmesser.

Nun verhält sich:

$$KL : HJ : BC = GL : GJ : GC$$
$$= CJ : GJ : GC,$$

folglich: $KL_q : HJ_q : BC_q = CJ_q : GJ_q : GC_q$ (155, Z. 1)

$\triangle KLM : \triangle HJN : \triangle ABC = CJ_q : GJ_q : GC_q$ (205), mithin auch:

$\triangle KLM : \triangle HJN + \triangle ABC = CJ_q : GJ_q + GC_q$ (155)

aber $CJ_q = GJ_q + GC_q$ (246 und 87)

folglich $\triangle KLM = \triangle HJN + \triangle ABC$; w. z. b. w.

553. Zieht man durch die Ecken des Urdreiecks Gerade AO, BP, CQ (Fig. 441.) so, dass $\angle BAO = \angle CBP = \angle ACQ = 2 \angle BAD$, so ist das von diesen Linien gebildete Dreieck OPQ dem Urdreieck congruent.

Beweis. Man nehme zunächst $\angle GAP = \angle BAD$ und verbinde den Durchschnittspunkt P des Schenkels AP mit der Peripherie des Kreises S und die Ecke B durch die Gerade BP; verlängere AP über P hinaus, bis sie die Peripherie des Kreises R zum zweiten Male in O schneidet; ziehe CO und verlängere sie

über O hinaus, bis sie die Peripherie des Kreises T zum zweiten Male in Q schneidet, und ziehe endlich BQ, so ist:

$$\angle PBG = \angle PAG \text{ (244, Z. 1)}$$
$$= \angle GAB \text{ (Constr.)}$$
$$= \angle GBD \text{ (546, 1)}$$

also $\angle PBC = \angle BAP = 2BAD$

$$\angle BAP = \angle ACO \text{ (247)}$$
$$= \angle ACQ$$

daher $\angle PBC = \angle BAO = \angle ACQ.$

Nun ist: $\angle ACQ + \angle QCJ = R$ (Constr.)

$$\angle QCJ = \angle QBJ \text{ (244, Z. 1)}$$

folglich $\angle PBC + \angle QBJ = R$

aber $\angle CBJ = R$ (Constr.), mithin

$\angle PBC + \angle QBJ + \angle CBJ = 2R,$

folglich QBP eine einzige Gerade.

Wir haben demnach gezeigt, dass wenn man durch die Ecken des Urdreiecks Gerade AO, BP, CQ so zieht, dass $\angle BAO = \angle CBP = \angle ACQ = 2 \angle BAD$, und diese Geraden bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt verlängert, das so entstandene Dreieck OPQ mit seinen Ecken einzeln auf den Peripherieen unserer drei Kreise liegt.*)

Man ziehe GP und GO, so ist:

$$\angle BPG = \angle BAG \text{ (244, Z. 1)}$$
$$= \angle PBG \text{ (siehe oben)}$$

folglich: $BG = PG$ (52) 1

$$\angle ABG + \angle APG = 2R \text{ (275)}$$
$$= \angle APG + \angle GPO \text{ (20)}$$

mithin: $\angle ABG = \angle GPO$ .... 2.

$$\angle BAG = \angle GCA \text{ (A. 546, 1)}$$
$$= \angle GOP \text{ (244, Z, 1)} \text{ .... 3,}$$

folglich aus 1, 2 u. 3 $\triangle ABG \cong \triangle POG$ (46)

*) Dies kann man auch kürzer nach A. 547 construiren und beweisen; man macht nämlich Winkel DAP = BAD, verlängert AP bis O, PB bis Q und zieht QO, so hat man ebenfalls das Dreieck OPQ, dessen Ecken Q und O mit der Ecke C des Dreiecks ABC in gerader Linie liegen (A. 547). Man hat auf diese Weise also den Punkt P im Umfange des Kreises S mit den beiden eben dieser Peripherie angehörigen Dreiecksspitzen A und B verbunden und diese Geraden verlängert, bis sie die Peripherieen der beiden andern Kreise zum zweiten Male schneiden.

daher $AB = OP$

Ferner ist: $\angle ACB = \angle PQO$

$\angle ABC = \angle ABP + \angle PBC$

$= \angle ABP + \angle BAP$ (Constr.)

$= \angle OPQ$ (38)

mithin $\triangle ABC \cong \triangle OPQ$ (46); w. z. b. w.

554. Zieht man durch die Spitzen eines beliebigen Dreiecks gerade Linien so, dass sie die Gegenseiten oder deren Verlängerungen unter beliebigen, aber gleichen schiefen Winkeln schneiden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass sie mit den Höhenperpendikeln des Dreiecks, mit welchen sie von derselben Dreiecksspitze auslaufen, gleichmässig gleiche Winkel bilden ($\angle KAD = \angle HBE = \angle JCF$ Fig. 142.), und verlängert dieselben bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so

1) ist das so entstandene Dreieck dem Urdreieck ähnlich;

2) dessen Ecken liegen einzeln auf den Umfängen der drei gleichen (A. 508) Kreise, von denen jeder durch zwei Spitzen und den Höhendurchschnitt des Urdreiecks geht.

Beweis.

1. $\angle HKJ = \angle ABE + \angle EBH - \angle BAK$ (38)

$= \angle ABE + \angle BAK + \angle BAD - \angle BAK$ (V.)

$= \angle ABE + \angle BAD$, aber:

$\angle ABE + \angle BAD + \angle AGB = 2R$ (38)

$= \angle ABE + \angle BAD + \angle DGE$ (22)

$= \angle DGE + \angle ACB$ (Constr. u. 275)

folglich: $\angle HKJ = ACB$. Analog diesem Beweise ist:

$\angle KHJ = \angle BAC$,

mithin: $\triangle HJK \sim \triangle ABC$ (196, Anmk.)

2. Aus 1 hatte man:

$\angle HKJ = \angle ABE + \angle BAD$, addirt man

hierzu: $\angle KAB + \angle ABK = \angle KAB + \angle ABK$

$\angle HKJ + \angle KAB + \angle ABK = \angle KBG + \angle KAG$

$\angle HKJ + \angle KAB + \angle ABK = 2R$ (38), folglich:

$\angle KBG + \angle KAG = 2R$,

mithin AGBK ein Kreisviereck (244, Z. 4).

Da aber AGB in Kreis Y steht, so liegt auch der Punkt K auf der Peripherie dieses Kreises. Ganz ähnlich ist der Beweis, dass der Punkt J im Umkreise des Kreises U und der Punkt H im Umkreise des Kreises V liegt; w. z. b. w.

555. Von jedem der ähnlichen Dreiecke, welche man auf die im vorigen Satze angegebene Weise erhalten kann, haben die drei Ecken gleiche Entfernung vom Höhendurchschnitt des Urdreiecks. (Fig. 442.)

Beweis. Man ziehe GK, GJ, GH, so ist:

$$\left.\begin{array}{l}\angle AKG = \angle ABG \\ \angle AJG = \angle ACG\end{array}\right\} (244, \text{ Z. } 1)$$

$$\angle ABG = \angle ACG \ (38, \text{ Z. } 2)$$

folglich: $\angle AKG = \angle AJG$

mithin: $GK = GJ$ (52).

Ebenso ist: $GK = GH = GJ$; w. z. b. w.

Zusatz. Alle die unendlich vielen unter sich und dem Urdreieck ähnlichen Dreiecke, die man anf die mehr erwähnte Weise erhalten kann, haben also in dem Höhendurchschnitt des Urdreiecks einen gemeinschaftlichen Aehnlichkeitspunkt.

Beweis. Die entsprechenden gleichschenkeligen Dreiecke wie GHJ, in welche die in Rede stehenden ähnlichen Dreiecke, wie HJK, durch die Geraden, die man von den Ecken nach dem Punkte G zieht, zerfallen, sind einander ähnlich (196, Anmk.), weil die gleichen Winkel auf denselben Bogen stehen; es verhalten sich also die Grundlinien, welches die Seiten der in Rede stehenden Dreiecke sind, wie die Entfernungen der Ecken vom Punkte G, folglich ist dieser Punkt der gemeinschaftliche Aehnlichkeitspnnkt der Dreiecke (A. 372), w. z. b. w.

556. Das grösste unter allen diesen Dreiecken ist dasjenige, dessen Seiten einzeln senkrecht auf den Höhen des Urdreiecks stehen, und folglich mit dessen Seiten parallel laufen.

Beweis. Es sei △TWZ (Fig. 442.) dasjenige, dessen Seiten senkrecht auf den Höhenperpendikeln des Urdreiecks stehen. Man ziehe GW, so ist: $\angle WBG = R$ (Constr.), folglich GW ein Durchmesser des Kreises V (246), also die grösste Sehne (250, Z. 1) nnd daher auch grösser als GH, der Entfernung der Ecke eines ganz beliebigen andern von jenen Dreiecken vom gemeinschaftlichen Aehnlichkeitspunkt G; mithin ist auch $GW_q > GH_q$; es verhält sich aber

$$WZ : HJ = GW : GH \ (\text{A. } 555, \text{ Z. und A. } 371)$$

daher: $WZ_q : HJ_q = GW_q : GH_q$ (155, Z. 1)

folglich: $WZ_q > HJ_q$, aber:

$\triangle TWZ : \triangle KHJ = WZ_q : HJ_q$ (205)

mithin $\triangle TWZ > \triangle KHJ$ (149); w. z. b. w.

Zusatz. Der Flächenraum dieses grössten Dreiecks ist das Vierfache vom Inhalte des Urdreiecks.

Beweis. Da die Seiten des Dreiecks TWZ parallel denen des Dreiecks ACB laufen (26, Z. 1), so sind ACBT, ABCZ, ABWC Parallelogramme, in denen die Seiten des Dreiecks ACB einzeln die Diagonalen sind, folglich:

$$\triangle ABC = \triangle ABT$$
$$= \triangle ACZ$$
$$= \triangle BWC,$$

und daher $4 \triangle ABC = \triangle ABT + \triangle ACZ + \triangle BWC + \triangle ABC$
$= TWZ$; w. z. b. w.

557. Zieht man durch die Ecken eines Dreiecks gerade Linien so, dass jede von ihnen die Gegenseite unter Winkeln von 60^0 gleichmässig schneidet, so bilden dieselben, bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert, ein Dreieck (LMN Fig. 442.), welches dem Urdreiecke congruent ist.

Beweis. Das Dreieck LMN liegt mit seinen Ecken einzeln auf den Umfängen der drei Kreise und ist dem Urdreieck ähnlich (A. 554). Man fälle $GS \perp ML$ und ziehe GM; es sei ferner der Punkt O der Mittelpunkt des äussern Kreises für das Dreieck ABC; man ziehe BO und fälle $OR \perp BC$, so ist $BR = CR = \frac{1}{2}BC$ (241, Z.).

Ferner ist: $\angle ABC = \angle LMN$

oder: $\angle ABO + \angle OBR = \angle GMS + \angle GMC$

$\angle ABO = \angle GBD$ (A. 72)

$= \angle GAC$ (38, Z. 2),

[weil $\angle BGD = \angle AGE$ (22) und $\angle BDG = \angle AEG = R$ (Constr.)]

$= \angle GMC$ (244, Z. 1),

folglich: $\angle OBR = \angle GMS$

$\angle BRO = \angle MSG = R$ (Constr.)

$AG = 2GS$ (A. 60), [weil AL die Linie BC unter einem Winkel von 60^0 schneidet (V.) und $\angle ADB = R$, also $\angle SAG = 30^0 = \frac{1}{2} \angle AGS$]

$AG = 2OR$ (A. 348, Z. 2)

mithin: $OR = GS$,

folglich: $\triangle OBR \cong \triangle GMS$ (46)

also: $BO = GM$. Zieht man noch GL und GN,

so ist $\angle ALG = \angle ABG$ (244, Z. 1)

$= \angle ACG$ (38, Z. 2)

$= \angle LMG$ (244, Z. 1)

also: $GM = GL$ (52)

ebenso ist: $GN = GM = GL$.

Mithin ist G der Mittelpunkt des äussern Kreises des Dreiecks LMN; daher sind O und G Aehnlichkeitspunkte der ähnlichen Dreiecke ABC und LMN (A. 375). Nun verhält sich:

$$AB : MN = BO : GM$$

$$BO = GM$$

mithin: $AB = MN$.

Ebenso ist: $BC = ML$

$AC = NL$,

folglich $\triangle ABC \cong \triangle MNL$ (50); w. z. b. w.

558. Zieht man durch die Spitzen eines beliebigen Dreiecks gerade Linien so, dass sie die Gegenseiten oder deren Verlängerungen gleichmässig unter Winkeln schneiden, von denen jeder die Hälfte eines Rechten, so bilden dieselben, bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert, ein Dreieck, welches doppelt so gross, als das Urdreieck ist.

Beweis. Mit Beibehaltung der Construction des vorigen Satzes (Fig. 442.) ist, wenn LA die Seite BC unter einem Winkel von 45^0 schneidet, auch $\angle SAG = 45^0 = \angle AGS$; es wird also:

$$AS = GS$$

daher $AG_q = 2GS_q$ (87)

und da $AG = 2OR$ (A. 348, Z. 2)

so ist: $AG_q = 4OR_q$

mithin $GS_q = 2OR_q$. Es verhält sich also:

$GS_q : OR_q = 2 : 1$. Da ferner O und G Aehnlichkeitspunkte der Dreiecke ABC und LMN (vgl. Bew. zu A. 557), sich demnach verhält: $LM : BC = GS : OR$, und folglich:

$$LM_q : BC_q = GS_q : OR_q \text{ (155, Z. 1)}$$

aber auch: $LM_q : BC_q = \triangle LMN : \triangle ABC$ (205), so ist:

$$\triangle LMN : \triangle ABC = GS_q : OR_q$$

$$= 2 : 1$$

also $\triangle LMN$ doppelt so gross, als $\triangle ABC$; w. z. b. w.

559. Zieht man in einem beliebigen Dreiecke diejenigen Transversalen, welche die Gegenseiten (der Ecken, durch welche sie gehen) gleichmässig unter Winkeln schneiden, von denen jeder gleich ist dem dritten Theile eines Rechten, so bilden dieselben bei hinreichender Verlängerung ein Dreieck, welches dreimal so gross, als das Urdreieck ist.

Beweis. Mit Beibehaltung der Construction der beiden vorhergehenden Sätze (Fig. 442.) wird, wenn AL die Linie BC unter einem Winkel von 30^0 schneidet, $\angle SAG = 60^0 = 2 \angle SGA$;

folglich $AG = 2AS$ (A. 60)

$AG = 2OR$ (A. 348, Z. 2)

mithin $AS = OR$.

Nun ist: $GS_q = AG_q - AS_q$ (87, Z. 1)

$= 4OR_q - OR_q$

$= 3OR_q$

also: $GS_q : OR_q = 3 : 1$

und hieraus erhält man, analog dem Beweise des vorigen Satzes:

$\triangle LMN = 3 \triangle ABC$; w. z. b. w.

560. Zieht man in einem beliebigen Dreiecke zwei Ternionen von Scheitellinien so, dass jede gleiche Winkel mit den Höhenperpendikeln gleichmässig bildet, und der Winkel der einen Ternion das Complement vom Winkel der andern ist, so ist die Summe der von diesen Transversalen gebildeten beiden Dreiecke eine constante Grösse, nämlich viermal so gross, als das Urdreieck.

Beweis. Die Kreise, von denen jeder durch zwei Ecken und den Höhendurchschnitt des Urdreiecks gehen, sind nicht nur untereinander, sondern auch dem äussern Kreise des Urdreiecks gleich (A. 508); in diesen Kreisen nun stehen die Winkel, welche die Seiten der beiden neuen Dreiecke mit den Höhenperpendikeln des Urdreiecks bilden, auf Bogen, deren zugehörige Sehnen die Radien der äussern Kreise der genannten Dreiecke sind (A. 555). Trägt man daher an jeden Endpunkt eines Durchmessers jener Kreise nach derselben Seite hin einen der beiden Winkel, von denen der eine das Complement des andern ist, so an, dass ein Schenkel auf dem Durchmesser liegt, so schneiden sich die beiden andern Schenkel, hinreichend verlängert, unter rechten Winkeln (38); dieser Durchschnittspunkt liegt mithin im Umkreise (244, Z. 3); die Katheten des so entstandenen rechtwinkeligen Dreiecks sind einzeln gleich den Radien der äussern Kreise der in Rede stehenden Dreiecke (245 und 245, Z. 5) und die Hypotenuse gleich dem doppelten Radius des äussern Kreises des Urdreiecks. Nennt man daher diesen letzteren Radius R, die beiden andern R′, R″ und bezeichnet das Urdreieck mit $\triangle$, die beiden andern bezüglich mit $\triangle'$, $\triangle''$, so ist:

$$R'^2 + R''^2 = (2R)^2 \text{ (87)}$$
$$= 4R^2,$$

also 1) $R'^2 + R''^2 : R^2 = 4 : 1$,

aber $R'^2 : R''^2 = \triangle' : \triangle''$ (A. 555 und 205),

daher $R'^2 + R''^2 : R'^2 = \triangle' + \triangle'' : \triangle'$ (153)

$R^2 : R'^2 = \triangle : \triangle'$ (A. 555 und 205),

folglich $R'^2 + R''^2 : R^2 = \triangle' + \triangle'' : \triangle$

$= 4 : 1$ (wegen 1),

mithin $4 . \triangle = \triangle' + \triangle''$; w. z. b. w.

Anmerkung. Es ergibt sich also hieraus der bemerkenswerthe Umstand, dass man bei unsern in Rede stehenden Dreiecken an Flächenraum nichts verliert, man mag einen rechten Winkel an die Höhenperpendikel des Urdreiecks anlegen (s. A. 556, Z.), oder denselben in zwei beliebige Stücke theilen und diese einzeln anlegen; denn die beiden letztern Dreiecke zusammen sind so gross als das erste.

561. Haben drei Kreise eine solche Lage gegeneinander, dass jeder die beiden andern von aussen berührt, und man verbindet die Mittelpunkte zweier, verlängert diese Gerade bis zum Durchschnitt mit derjenigen, welche die Berührungspunkte eben dieser beiden Kreise mit dem dritten verbindet, so

1) verhalten sich die Entfernungen der Mittelpunkte der genannten Kreise von jenem Durchschnittspunkte wie ihre Halbmesser;

2) das Stück der Axe unserer beiden Kreise zwischen ihrem Berührungspunkt und dem erwähnten Durchschnittspunkt ist die mittlere Proportionale zwischen den Stücken der andern Geraden, welche vom Durchschnittspunkte mit der ersten aus durch den einen und andern der Berührungspunkte, durch welche sie hindurchgeht, gebildet werden.

Beweis. 1. Man ziehe AC, BC, BH (Fig. 443.), so ist

$$\angle BHE = \angle BEH \text{ (51)}$$
$$= \angle CEF \text{ (22)}$$
$$= \angle CFE \text{ (51)},$$

folglich BH ∥ AC (24),

mithin $\triangle AFG \sim \triangle BHG$ (196),

also AG : BG = AF : BH.

2. Man ziehe DF und DE, so ist

$$\angle CFE + \angle EFD + \angle DFA = 2R \text{ (20)}$$
$$= \angle FED + \angle EFD + \angle EDF \text{ (38)},$$

daher $\angle CFE + \angle DFA = \angle FED + \angle EDF$
$\angle CFE + \angle DFA = \angle CEF + \angle ADF$ (51),
folglich $\angle CEF + \angle ADF = \angle FED + \angle EDF$
$\angle EDF + \angle ADF = \angle FED + \angle CEF$ (51).
Durch Addition hat man:
$\angle CEF + \angle EDF + 2\angle ADF = \angle CEF + \angle EDF + 2\angle FED$,
folglich $\angle ADF = \angle FED$,
daher auch $\angle FDG = \angle DEG$ (20),
mithin $\triangle FDG \sim \triangle DEG$ (196),
es ist also $FG : DG = DG : EG$; w. z. b. w.

562. Erklärung. Zieht man in der Ebene eines Kreises eine beliebige Gerade und auf sie eine Senkrechte aus dem Mittelpunkte, so heisst derjenige Punkt dieser letzteren oder ihrer über den Fusspunkt hinausgehenden Verlängerung, welcher um die Länge der dritten Proportionale zu ihr und dem Kreishalbmesser vom Mittelpunkte entfernt ist, der zur ersteren Geraden gehörige Pol, die Gerade selbst heisst in Beziehung auf diesen Punkt dessen Polare.

Anmerkung 1. Einige französische Mathematiker, von denen überhaupt diese Ausdrücke in die Geometrie eingeführt worden sind, nennen den Punkt der Polare, in welchem sie von der aus dem Mittelpunkte auf sie gefallten Senkrechten geschnitten wird, und den zu ihr gehörigen Pol zusammen conjugirte Pole und sagen: zwei Punkte heissen conjugirte Pole eines Kreises, wenn sie mit ihm in derselben Ebene, mit dessen Mittelpunkte in gerader Linie, auf einerlei Seite und in solchen Entfernungen von letzterem liegen, dass der Kreishalbmesser die mittlere Proportionale zwischen diesen ist. Eine Gerade, durch einen der Pole senkrecht auf die Verbindungslinie beider Pole gezogen, heisst die Polare des andern Pols.

Zusatz 1. Zu jeder Geraden als Polare lässt sich leicht der zugehörige Pol finden, und umgekehrt.

a) Es sei AB (Fig. 444.) die gegebene Gerade; man soll den zugehörigen Pol finden.

Auflösung. Man ziehe $CD \perp AB$, von D eine Tangente DE an den Kreis, fälle vom Berührungspunkte E derselben eine Senkrechte EF auf CD, so ist F der gesuchte Pol.

Beweis. Ziehe CE, so ist
$\angle CED = R$ (243),
folglich $CD : CE = CE : CF$ (209, Z. 2),
also F der Pol zur Polare AB; w. z. b. w.

b) Es sei F der gegebene Pol; man soll die zugehörige Polare finden (Fig. 444.).

Auflösung. Man ziehe CF, errichte auf CF in F eine Senkrechte FE, die man bis zum Durchschnitt mit dem Umkreise verlängert, zieht an diesen Punkt eine Tangente an den Kreis und verlängert sie sowohl, als auch die zuerst gezogene Gerade CF, bis sie sich in D schneiden, so ist die in D auf CD errichtete Senkrechte AB in ihrer unbegrenzten Verlängerung die Polare zum Punkte F.

Beweis ist derselbe wie der vorhergehende.

Anmerkung 2. Wenn die gegebene Polare den Kreis schneidet, wie EF (Fig. 444.), und man soll den zugehörigen Pol finden, so fälle man CF ⊥ EF, im Uebrigen ist die Construction, so wie der Beweis derselbe wie unter b; wenn ferner der gegebene Pol nicht innerhalb, sondern ausserhalb des Kreises liegt, wie D, so ziehe man CD, im Uebrigen ist die Construction und der Beweis derselbe, wie der unter a; im erstern dieser beiden Fälle ist daher D der Pol zur gegebenen Polare EF, im letztern EF die Polare zum gegebenen Pole D.

Anmerkung 3. In Betreff der beiden Fälle, wo die gegebene Polare den Kreis berührt, oder wo der gegebene Pol im Umfange des Kreises liegt, siehe Zusatz 4.

Zusatz 2. Jede Gerade in der Ebene eines Kreises hat als Polare nur einen einzigen Pol, und zu jedem Punkte in der Ebene eines Kreises als Pol gehört nur eine einzige Gerade als Polare.

Beweis. a. Hätte die Gerade AB (Fig. 444.) ausser dem Punkte F noch einen andern Punkt, etwa G, als Pol, so wäre

$$CG : CH = CH : CF \quad (A. 562),$$

aber
$$CD : CH = CH : CF,$$

mithin $CG = CD$, was nicht möglich ist, folglich kann die Polare AB keinen andern Punkt als den Punkt F zum Pol haben.

b. Hätte der Punkt F ausser AB noch eine zweite Polare, etwa GJ, so wäre

$$CG : CH = CH : CF \quad (A. 562),$$

aber
$$CD : CH = CH : CF,$$

mithin $CG = CD$, was nicht möglich ist, folglich kann der Punkt F als Pol keine andere Gerade als AB zur Polare haben; w. z. b. w.

Zusatz 3. Liegt der eine zweier conjugirten Pole innerhalb des Kreises, so liegt der andere nothwendig ausserhalb, und umgekehrt; oder liegt die Polare ausserhalb des Kreises, so liegt ihr Pol innerhalb desselben, und umgekehrt.

Beweis. a. Läge der zu F (Fig. 444.) gehörige Pol ebenfalls innerhalb des Kreises, etwa wie der Punkt K, so wäre, wenn man an den Punkt E eine Tangente an den Kreis zöge und CK bis zum Durchschnitt mit derselben verlängerte:

CD : CE = CE : CF (209, Z. 2),

aber CK : CE = CE : CF (A. 562),

folglich CD = CK, was nicht möglich ist; mithin muss der zum Pole F gehörige conjugirte Pol ausserhalb des Kreises liegen.

Ganz ähnlich ist der Beweis, dass, wenn einer von zwei conjugirten Polen ausserhalb des Kreises liegt, der andere innerhalb desselben liegen muss.

b. Auch für den zweiten Theil des Zusatzes und seine Umkehrung ist der Beweis dem oben geführten ähnlich.

Zusatz 4. Liegt dagegen einer der Pole im Umkreise, so muss auch der andere daselbst liegen, oder, jeder Punkt im Umkreise ist sein eigener conjugirter Pol. Die einem Punkte im Umfange als Pol zugehörige Polare ist die durch diesen Punkt gehende Tangente.

Beweis folgt unmittelbar aus Zusatz 1, verbunden mit 243.

Anmerkung 4. Aus Zusatz 3 und 4 sieht man leicht, dass, je mehr sich von zwei conjugirten Polen der innerhalb des Kreises liegende vom Mittelpunkte entfernt, der ausserhalb liegende sich demselben nähert, bis sie im Umfange zusammenfallen; dass hingegen der letztere in dem Maasse sich vom Mittelpunkte entfernt, als der erstere sich demselben nähert; ist dieser daher endlich der Mittelpunkt selbst, so ist die Entfernung des anderen von dem Mittelpunkte $= \infty$, und der Kreisdurchmesser würde die Polare dieses andern Poles sein.

563. Hat man zwei Paare zugeordneter Pole (P, N und Q, O, Fig. 445.) und verbindet die gleichnamigen, d. h. die innern und die äussern untereinander, so sind diese beiden Geraden (PQ, NO) stets antiparallel zu einander, und umgekehrt.

Beweis. 1. Es ist, wenn man den Radius mit r bezeichnet:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = CN \, . \, CP \\ r^2 = CO \, . \, CQ \end{array}\right\} \text{(A. 562)}$$

daher $CN \, . \, CP = CO \, . \, CQ$,

also $CN : CO = CQ : CP$,

folglich $\triangle NCO \sim \triangle QCP$ (198),

folglich $\angle CNO = \angle CQP$

$\angle CON = \angle CPQ$,

mithin LM anti ∥ NO (A. 37, Anmk.), w. z. b. w.

2. Ist LM anti || NO, so sollen P und N, Q und O zwei Paare zugeordneter Pole sein. Man beschreibe über CN als Durchmesser einen Halbkreis, errichte auf CN in P eine Senkrechte PO, die man bis zum Durchschnitt mit der Peripherie verlängert, ziehe CV und NV, so ist $\angle CVN = R$ (246),

folglich $CN : CV = CV : CP$ (209, Z. 2).

Beschreibt man daher aus C als Mittelpunkt mit CV als Radius einen Kreis, so sind P und N ein Paar conjugirte Pole desselben (A. 562); nennt man seinen Radius r, so ist also

$$r^2 = CN \cdot CP,$$

da LM anti || NO (Vorauss.), so ist $\triangle CNO \sim \triangle CQP$ (196),

daher $CO \cdot CQ = CN \cdot CP$, folglich auch

$$CO \cdot CQ = r^2,$$

es sind also auch Q und O conjugirte Pole (A. 562), w. z. b. w.

564. Jede Gerade (PQ, Fig. 445.), welche die zu zwei beliebigen andern (AB, DE) gehörigen Pole (P, Q) verbindet, ist die Polare, zu welcher der Durchschnittspunkt (F) dieser letztern als Pol gehört, und umgekehrt: der Durchschnittspunkt zwei beliebiger Polaren ist der Pol, zu welchem die Gerade als Polare gehört, welche die zugehörigen Pole jener verbindet.

Beweis. 1. Man ziehe CF, so ist

$$\angle CNF + \angle COF = 2R \text{ (Constr.)},$$

also CNFO ein Kreisviereck (244, Z. 4),

mithin $\angle NFC = \angle NOC$ (244, Z. 1)

$= \angle CPQ$ (A. 563),

folglich $\triangle CNF \sim \triangle CGP$ (196, Anmk.),

daher $CN : CF = CG : CP$,

also $CN \cdot CP = CF \cdot CG$

$CN \cdot CP = r^2$ (A. 564), wenn r = dem Radius ist,

folglich $CF \cdot CG = r^2$,

daher sind G und F conjugirte Pole, und da $\angle CGP = \angle CNF = R$, so ist LM die Polare zum Pole F (A. 562); w. z. b. w.

2. Der Beweis, dass zum Pol F LM als Polare gehört, ist dem vorigen ganz ähnlich.

Anmerkung. Wenn die beiden in Rede stehenden Geraden AB und DE einander parallel sind, so fallen die aus dem Mittelpunkte C auf sie gefällten Senkrechten CN und CO zusammen (25, Z. u 29); es liegen also dann auch die Punkte P und Q auf dieser Senkrechten; die Gerade PQ würde demnach der Durchmesser und daher die Polare eines Punktes als Pol, dessen Entfernung vom Mittelpunkte $= \infty$ (A. 562, Z. 4, Anmk.).

Zusatz 1. Liegen daher mehrere Pole in einer geraden Linie, so müssen die zugehörigen Polaren entweder einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, oder untereinander parallel sein.

Beweis. a. Zieht man noch $WZ \perp CF$ (Fig. 445.), so ist WFZ die Polare zum Pole G (Hauptsatz), es schneiden sich also die zu den drei in gerader Linie liegenden Polen P, G, Q gehörigen Polaren AB, WZ, DE in einem Punkte F, und mehr als eine einzige Polare kann keiner der genannten Punkte haben (A. 562, Z. 2).

b. Wenn die Pole P, G, Q auf dem Durchmesser oder seiner Verlängerung liegen, so müssen die zugehörigen Polaren einander parallel laufen (A. 562, Anmk., 25, Z. und 29).

Zusatz 2. Umgekehrt, haben mehrere Gerade einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, oder sind parallel, so liegen ihre zugehörigen Pole in einer geraden Linie.

Beweis. a. Es seien AB, WZ, DE (Fig. 445.) Polaren, die sich im Punkte F schneiden; P, G, Q seien die zugehörigen Pole. Man ziehe PG und GQ, so ist

$$\left.\begin{array}{l} PG \text{ anti}\parallel NF \\ GQ \text{ anti}\parallel FO \end{array}\right\} \text{(A. 563)},$$

mithin
$$\left.\begin{array}{l} \angle CGP = \angle CNF = R \\ \angle CGQ = \angle COF = R \end{array}\right\} \text{(A. 562)},$$

also $\angle CGP + \angle CGQ = 2R$,

und folglich PGQ eine einzige Gerade (21).

b. Wenn die in Rede stehenden Geraden parallel laufen, so liegen ihre zugehörigen Pole auf einem und demselben Durchmesser (A. 562, 29 und 25, Z.), also in gerader Linie.

565. Ist der Durchschnittspunkt (F, Fig. 445.) zweier Geraden der Pol einer dritten (LM), so geht diese durch die zu den beiden ersten gehörigen Pole.

Beweis. Man ziehe CF, so ist, da LM die Polare von F, $\angle CGL = \angle CGM = R$ (A. 562). Fällt man nun $CN \perp AB$ und $CO \perp DE$, so ist $\triangle CNF \sim \triangle CGP$ und $\triangle COF \sim \triangle CGQ$ (196),

folglich $CN : CF = CG : CP$,

daher $CN \cdot CP = CF \cdot CG$

$= r^2$ (Vorauss.), wenn r der Radius ist,

mithin P der Pol zu AB (A. 562).

Eben so ist $CO \cdot CQ = CF \cdot CG = r^2$,

also auch Q der Pol zu DE,

es geht mithin LM durch die zu AB und DF gehörigen Pole; w. z. b. w.

566. Erklärung. Ein Winkel heisst um einen Kreis beschrieben, wenn seine beiden Schenkel denselben berühren.

Anmerkung. Ist bei einem solchen Winkel von der Länge seiner Schenkel die Rede, so versteht man die Stücke derselben, zwischen den Berührungspunkten und dem Scheitel.

567. Der Scheitel jedes um einen Kreis beschriebenen Winkels und der Halbirungspunkt der zu ihm gehörigen Berührungssehne sind conjugirte Pole; und die Berührungssehne selbst ist die Polare zu dem Scheitel des umschriebenen Winkels als Pol.

Beweis. Sind AC und BC (Fig. 446.) zwei Tangenten, so ist $\angle ACB$ ein um den Kreis beschriebener Winkel (A. 566). Man ziehe CD, BD, AB, so ist:

$AC = BC$ (250, Z. 4)

$\angle ACE = \angle BCE$ (250, 3)

mithin $\triangle AEC \cong \triangle BEC$ (45)

daher: $\angle AEC = \angle BEC = R$ (20) und $AE = BE$,

und da: $\angle CBD = R$ (243)

so ist: $CD : BD = BD : DE$ (209, Z. 2).

Mithin sind der Scheitel C des umschriebenen Winkels und der Halbirungspunkt E der Berührungssehne conjugirte Pole und die Berührungssehne AB die Polare zum Scheitel C als Pol (A. 562, Anmk.); w. z. b. w.

568. Liegen die Scheitel einer beliebigen Menge von Winkeln, die um denselben Kreis beschrieben sind, in einer geraden Linie, so haben ihre Berührungssehnen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, oder sind parallel.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 564, Z. 1, verbunden mit A. 567.

569. Umgekehrt, haben die Berührungssehnen, die zu mehreren um einen Kreis beschriebenen Winkeln gehören, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, oder sind sie parallel, so liegen die Scheitel dieser letztern in einer geraden Linie.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 564, Z. 2, verbunden mit A. 567.

570. Zieht man von einem Punkte ausserhalb eines Kreises nach demselben ein Paar Schneidende, so ist die diesem Punkte gehörige Polare diejenige Gerade, welche die beiden innerhalb des Kreises befindlichen Punkte jener beiden Schneidenden

verbindet, durch welche deren harmonische Theilung zu Stande gebracht wird.

Beweis. Sind CF und CG (Fig. 446.) die beiden Schneidenden, so ziehe man von C die beiden Tangenten CA und CB an den Kreis, ziehe deren Berührungssehne AB, so ist AB die Polare zum Punkte C als Pol (A. 567), und da die Punkte H und J, in welchen die Sehne AB die Schneidenden CF und CG schneidet, diejenigen innerhalb des Kreises befindlichen Punkte sind, durch welche die harmonische Theilung der beiden Schneidenden zu Stande gebracht wird (260), so ist AB, als Polare des Punktes C, diejenige Gerade, welche die beiden in Rede stehenden Punkte der beiden von C auslaufenden Schneidenden verbindet; w. z. b. w.

Anmerkung. Solche innerhalb des Kreises gelegene Punkte von geraden Linien, die von bestimmten Punkten ausserhalb als Schneidende an ihn gezogen sind, wollen wir der Kurze halber innere Harmonikalpunkte, die Punkte von denen sie auslaufen, aussere Harmonikalpunkte nennen.

571. Nimmt man ausserhalb eines Kreises eine beliebige Anzahl von Punkten, die auf einer geraden Linie liegen, und zieht von jedem derselben ein Paar beliebiger Secanten, so haben die Geraden, welche die inneren Harmonikalpunkte jedes Paares verbinden, entweder einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, oder sind parallel.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 570, verbunden mit A. 564, Z. 1.

572. Umgekehrt, wenn die Geraden, welche die inneren Harmonikalpunkte von einer beliebigen Menge von Secantenpaaren, von denen jedes von einem Punkte ausserhalb eines Kreises beliebig an denselben gezogen werden, verbinden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, oder parallel sind, so liegen die Punkte, von denen aus jedes Paar von Secanten gezogen ist, in einer geraden Linie.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 570, verbunden mit A. 564, Z. 2.

573. Hat man zwei beliebige Kreise (C und K Fig. 447.), zieht in ihnen mehrere Paare paralleler Halbmesser so, dass alle Paare zugleich entweder auf derselben Seite der Axe liegen (CO, KN und CE, KF u. s. w.), oder auf verschiedenen Seiten derselben (CG, KH und CL, KM u. s. w.), so haben die Geraden ON, EF u. s. w., sowie GH, LM u. s. w. einen ge-

meinschaftlichen auf der Axe der Kreise liegenden Durchschnittspunkt.

Beweis. Man verlängere ON über N hinaus, bis sie die verlängerte Axe in A schneidet, so ist, da CO ∥ KN (V.):

$$\triangle ACO \sim \triangle AKN \ (196)$$

mithin: $AC : AK = CO : KN$

aber $\left.\begin{array}{l} CO = CE \\ KN = KF \end{array}\right\}$ als Radien

folglich: $AC : AK = CE : KF$

und da: $CE \parallel KF$ (V.),

so liegen die Punkte E, F und A in einer geraden Linie (A. 309).

Zieht man ferner GH, so ist der Beweis, dass der Durchschnittspunkt J dieser Geraden mit der Axe und die Endpunkte L und M der parallelen Halbmesser CL und KM in gerader Linie liegen, dem eben geführten ganz ähnlich; es liegen aber die beiden Punkte A und J auf der Axe der Kreise, mithin haben die in Rede stehenden Geraden der einen und der andern Kathegorie einen gemeinschaftlichen auf der Axe der Kreise liegenden Durchschnittspunkt; w. z. b. w.

574. Umgekehrt, zieht man durch einen der so erhaltenen Durchschnittspunkte (A, J Fig. 447.) eine beliebige beide Kreise schneidende Gerade, so werden durch die Durchschnittspunkte zwei Paare paralleler Halbmesser bestimmt.

Beweis. Es seien die Radien CE und KF parallel; zieht man nun EF und verlängert sie, bis sie die verlängerte Axe in A schneidet; zieht hierauf von A aus eine beliebige Schneidende AO, so sollen die nach den Durchschnittspunkten derselben mit den Peripherieen gezogenen Halbmesser paarweise parallel sein; also CO ∥ KN und CB ∥ KD.

$$AC : AK = CE : KF \ (196)$$

$$\left.\begin{array}{l} CE = CB \\ KF = KD \end{array}\right\} \text{als Radien}$$

mithin: $AC : AK = CB : KD.$

Da nun $\angle COB = \angle CBO$ (51),

so ist $\angle CBO < R$ (38)

folglich: $\angle ABC > R$ (20)

ebenso: $\angle ADK > R$

folglich: $\triangle ABC \sim \triangle ADK$ (199)

daher: $\angle ABC = \angle ADK$

und folglich CB ∥ KD (26);
hieraus folgt auch unmittelbar wegen Gleichheit der Winkel:

CO ∥ KN.

Ist ferner CG ∥ KH, nnd man zieht GH, alsdann durch J eine beliebige beide Kreise Schneidende LM, so sollen die nach den Durchschnittspunkten derselben mit den Peripherieen gezogenen Halbmesser ebenfalls paarweise parallel sein. Der Beweis ist dem oben geführten ganz ähnlich; w. z. b. w.

575. Liegt jeder der beiden Kreise ausserhalb des andern, und man zieht von einem unserer in Rede stehenden Punkte (A, J Fig. 447.) an einen derselben eine Tangente (AR, JU), so berührt diese auch stets den andern Kreis.

Beweis. Man ziehe von A aus die Tangente AR an Kreis K und den Radins KR nach dem Berührungspunkte, alsdann in Kreis C den Radius CS ∥ KR, so ist:

AC : AK = CO : KN (A. 574)

also auch: AC : AK = CS : KR,

folglich liegen die Punkte A, R und S in einer geraden Linie (A. 309).

Da nun ∠ARK = R = ∠ASC (24), so ist AS eine Tangente des Kreises C, oder die vom Punkte A an Kreis K gezogene Tangente ist auch eine Tangente des Kreises C.

Ganz ähnlich ist der Beweis in Betreff der vom Punkte J an die Kreise gezogenen Tangenten; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Unsere beiden Punkte sind also bei dieser Lage der Kreise keine andern als diejenigen, von denen aus man die gemeinschaftlichen Tangenten an dieselben zieht, und es ergibt sich aus den vorigen Sätzen zugleich ein leichtes Verfahren zur Lösung der Aufgabe: An zwei gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.

Anmerkung 2. Man könnte in diesem Falle die mehr erwähnten Punkte (A, J) auch als die Scheitel der Winkel bezeichnen, die um die beiden Kreise (C, K) zugleich beschrieben sind.

576. Erklärnng. Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise nennt man die beiden Punkte ihrer Axe, in denen sich die geraden Linien schneiden, welche die Endpunkte paralleler Halbmesser verbinden (A. 573), und zwar heisst äusserer Aehnlichkeitspunkt derjenige (A), wo die zugehörigen parallelen Halbmesser auf derselben Seite der Axe liegen, innerer Aehnlichkeitspunkt dagegen der andere (J), für welchen das Gegentheil stattfindet (Fig. 447.).

Zusatz 1. Für zwei Kreise gibt es nie mehr, als zwei Aehnlichkeitspunkte.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 573.

Zusatz 2. Liegen die beiden Kreise ganz ausser einander, so fallen ihre Aehnlichkeitspunkte mit denen zusammen, in welchen die an sie gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten die Axe schneiden.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 575.

Zusatz 3. Berühren sich zwei Kreise von aussen, so ist dieser Berührungspunkt ihr innerer Aehnlichkeitspunkt; berühren sie sich dagegen von innen, so ist der Berührungspunkt ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt.

Beweis. a. Die Kreise C und K (Fig. 448.) mögen sich in A von aussen berühren; man ziehe durch den Berührungspunkt eine beliebige beide Kreise Schneidende DAB und nach deren Durchschnittspunkten mit den Umkreisen die Halbmesser, so ist:

$$\angle ACD = \angle AKB \ (265)$$

folglich: CD ∥ BK (26)

mithin A innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise C und K (A. 576).

b. Die Kreise C und M (Fig. 448.) mögen sich in A von innen berühren; man ziehe vom Berührungspunkte eine beliebige beide Kreise Schneidende AOD und nach deren Durchschnittspunkten mit den Peripherieen die Halbmesser, so ist:

$$\angle ACD = \angle AMO \ (265)$$

folglich: CD ∥ MO (26)

daher: A äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise C und M (A. 576) w. z. b. w.

Erklärung. Aehnlichkeitslinie zweier Kreise wollen wir künftig jede Gerade nennen, welche durch einen ihrer Aehnlichkeitspunkte geht, und zwar wollen wir sie, wie die letzteren, in äussere und innere unterscheiden, jenachdem sie durch den einen oder andern der Aehnlichkeitspunkte gehen.

Zusatz 4. Schneidet eine solche Aehnlichkeitslinie einen der Kreise, so schneidet sie auch nothwendig den andern, berührt sie den einen, so berührt sie auch den andern, und liegt sie endlich ganz ausserhalb des einen, so ist dies auch eben so mit dem andern.

Beweis. a. Zieht man vom äussern Aehnlichkeitspunkte A (Fig. 447.) der Kreise C und K eine Aehnlichkeitslinie AF, welche

Kreis K schneidet, so kann sie, wenn sie nicht auch zugleich Kreis C schneidet, denselben entweder nur berühren, oder ganz ausserhalb fallen. Berührt sie ihn etwa in E, so wäre, wenn man CE zieht,

$\angle AEC = R$ (243)

und da CE $\parallel$ KF, so wäre

$\angle AEC = \angle AFK$ (24)

also $\angle AFK = R$

mithin AF eine Tangente des Kreises K (242), was gegen die Voraussetzung; die verlängerte AF kann also den Kreis C nicht berühren.

Fiele sie ganz ausserhalb, so könnte sie nicht den Endpunkt des mit KF parallelen Halbmessers CE treffen, sondern nur dessen Verlängerung, etwa in Z, dann wäre:

$AC : AK = CZ : KF$ (196)

aber: $AC : AK = CE : KF$ (vgl. Bew. zu A. 573)

mithin wäre $CE = CZ$, was offenbar ungereimt ist; die verlängerte AF kann also auch nicht ausserhalb des Kreises C fallen und muss demnach denselben schneiden. Ein ähnlicher Beweis gilt für die vom innern Aehnlichkeitspunkte gezogenen Schneidenden.

b. und c. werden auf ähnliche Weise bewiesen, wie a.

Zusatz 5. Zieht man eine beliebige Aehnlichkeitslinie zweier Kreise und nach ihr zwei beliebige Parallelen von den Mittelpunkten aus, so verhalten sich diese stets wie die Halbmesser der Kreise.

Beweis. Es sei GF (Fig. 449.) die innere Aehnlichkeitslinie der Kreise C und K und CD $\parallel$ KE, so ist

$\triangle ACD \sim \triangle AKE$ }
und $\triangle ACF \sim \triangle AKG$ } (196)

daher $AC : AK = CD : KE$

$AC : AK = CF : KG$,

mithin: $CD : KE = CF : KG$; w. z. b. w.

Anmerkung. Es ist kaum nöthig, zu erinnern, dass für aussere Aehnlichkeitslinien die Parallelen auf einerlei Seite der Axe, für innere auf verschiedenen Seiten liegen müssen.

Zusatz 6. Umgekehrt, durch einen der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise geht jede Gerade (ist also eine Aehnlichkeitslinie derselben), welche die Endpunkte zweier von ihren Mittelpunkten auslaufenden Parallelen verbindet, die sich wie ihre Halbmesser ver-

halten, und zwar durch den äussern Aehnlichkeitspunkt, wenn diese Parallelen auf derselben Seite der Axe liegen, im entgegengesetzten Fall durch den innern.

Beweis. Es sei CD ‖ KE (Fig. 449.), so soll, wenn sich diese Geraden wie ihre Radien verhalten, DE eine innere Aehnlichkeitslinie sein. Man ziehe ein Paar beliebiger paralleler Halbmesser und verbinde ihre Endpunkte G und F durch die Gerade GF, so ist GF eine innere Aehnlichkeitslinie und A der innere Aehnlichkeitspunkt (A. 576 und A. 576, Z. 3), und es verhält sich:

$$CF : KG = AC : AK \quad (196)$$
$$CF : KG = CD : KE \quad (V.)$$

mithin: $AC : AK = CD : KE$,

folglich liegen die Punkte D, A, E in gerader Linie (A. 309) nnd DE geht durch den innern Aehnlichkeitspunkt A.

Ganz ähnlich ist der Beweis für den andern Fall, in Betreff des äussern Aehnlichkeitspunktes.

577. Beschreibt man in einer Ebene drei beliebige Kreise nnd sucht für je zwei sowohl die äussern als innern Aehnlichkeitspunkte, so giebt es unter diesen sechs Punkten immer vier Ternionen, von denen jede in einer geraden Linie liegt, nämlich die drei äussern Aehnlichkeitspunkte unter einander, und jeder derselben mit den beiden innern Aehnlichkeitspunkten, welche die beiden zu diesem äussern Aehnlichkeitspunkte gehörigen Kreise beziehungsweise mit dem dritten Kreise bilden. Bezeichnet man also unsere drei Kreise mit M_1, M_2, M_3 (Fig. 450.), den äussern Aehnlichkeitspunkt von M_1 nnd M_2 mit A_3, den innern mit J_3; die Aehnlichkeitspunkte von M_1 und M_3 beziehungsweise mit A_2 und J_2, und endlich die von M_2 und M_3 mit A_1 und J_1, so liegen von diesen sechs Punkten in gerader Linie:

1) A_1, A_2, A_3
2) A_1, J_2, J_3
3) A_2, J_1, J_3
4) A_3, J_1, J_2.

Beweis. Nennt man die Halbmesser unserer drei Kreise M_1, M_2, M_3 beziehungsweise R_1, R_2, R_3, zieht aus den Mittelpunkten nach der Geraden, welche zwei der Aehnlichkeitspunkte z. B. A_1 und A_2 verbindet, die drei beliebigen Parallelen P_1, P_2, P_3, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 : P_3 = R_1 : R_3 \\ P_2 : P_3 = R_2 : R_3 \end{array}\right\} \text{(A. 576, Z. 5)}$$

folglich: $P_1 : P_2 = R_1 : R_2$.

Es ist also die Gerade A_1A_2 zugleich auch Aehnlichkeitslinie für die Kreise M_1 und M_2 (A. 576, Z. 6), und zwar äussere, weil die aus den Mittelpunkten nach ihr gezogenen Parallelen P_1 und P_2 jedenfalls auf derselben Seite der Axe M_1M_2 liegen; es liegen demnach A_1 und A_2 mit A_3 in gerader Linie. Ebenso einfach ist der Beweis für jeden der drei übrigen Theile des Lehrsatzes.

Anmerkung. Es kann für den ersten Angenblick nicht anders als befremdend erscheinen, dass die drei innern Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise nicht ebenso in gerader Linie liegen, wie die drei äussern; dass dies nie möglich ist, davon kann man sich durch einen Blick auf die Figur leicht überzeugen. Die drei äussern Aehnlichkeitspunkte liegen nämlich auf den Verlängerungen der Axen unserer drei Kreise; dio Axen bilden aber ein Dreieck $M_1M_2M_3$, und da man jederzeit eine gerade Linie ziehen kann, welche entweder zwei Seiten eines Dreiecks selbst und die Verlängerung der dritten Seite, oder welche die Verlängerungen aller drei Seiten schneidet, niemals aber eine Gerade, welche die drei Seiten selbst schnitte, so ist die Möglichkeit gegeben, dass die drei äussern Aehnlichkeitspunkte untereinander in gerader Linie liegen können und jeder mit zwei innern Aehnlichkeitspunkten; es ist aber nie möglich, dass die drei innern Aehnlichkeitspunkte in gerader Linie liegen, weil sie auf den Seiten des von den Axen gebildeten Dreiecks selbst liegen.

Zusatz. Liegt daher von drei Kreisen jeder ausserhalb der beiden andern, und man zieht an je zwei ihre gemeinschaftlichen Tangentenpaare, so liegen von den sechs Durchschnittspunkten dieser einzelnen Paare viermal drei in gerader Linie.

Beweis. Die Aehnlichkeitspunkte A_1, A_2, A_3, J_1, J_2, J_3 (Fig. 450.) sind diejenigen, von denen aus die gemeinschaftlichen Tangentenpaare gezogen werden (A. 575, Anmk. 1), sind also die in Rede stehenden Durchschnittspunkte, und nach dem Hauptsatze haben die Aehnlichkeitspunkte die im Zusatze erwähnte Lage; w. z. b. w.

578. Berührt ein Kreis zwei andere gleichartig, d. h. beide zugleich von aussen oder von innen, so liegt der äussere Aehnlichkeitspunkt dieser letztern mit den Berührungspunkten in gerader Linie.

Beweis. Geschieht die Berührung von aussen, so sind die Berührungspunkte die inneren, im entgegengesetzten Falle aber die äussern Aehnlichkeitspunkte der betreffenden Kreise (A. 576, Z. 3), und in beiden Fällen liegen sie mit dem äussern Aehnlichkeits-

pnnkte der beiden Kreise, von denen jeder von dem ersten berührt wird, in gerader Linie (A. 577); w. z. b. w.

579. Berührt dagegen ein Kreis zwei andere ungleichartig, so liegt der innere Aehnlichkeitspnnkt dieser letzteren mit den beiden Berührungspunkten in gerader Linie.

Beweis. Berührt der erste Kreis den zweiten von aussen; den dritten von innen, so ist der erstere Berührungspnnkt der innere, der letztere aber der äussere Aehnlichkeitspunkt der betreffenden Kreise (A. 576, Z. 3); folglich muss der Aehnlichkeitspunkt des zweiten und dritten Kreises, welcher mit den genannten in gerader Linie liegt, der innere sein (A. 577); w. z. b. w.

Zusatz. Sind daher zwei beliebige Kreise gegeben, nnd man construirt zwei andere, von denen der eine den ersten der gegebenen von aussen, und den andern von innen, der zweite dagegen diesen letztern von anssen und den ersten von innen berührt, so schneiden die Geraden, welche die Berührungspunkte in dem einen und andern Falle verbinden, die Axe der gegebenen Kreise in demselben Pnnkte, — in ihrem innern Aehnlichkeitspunkte.

Beweis. Da die Berührungen zweimal von anssen nnd zweimal von innen stattfinden, so hat man zwei innere und zwei änssere Aehnlichkeitspunkte (A. 576, Z. 3), von denen je ein innerer und ein äusserer mit dem inneren Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise in gerader Linie liegen (A. 577), oder, mit andern Worten, der innere Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise ist der Durchschnittspnnkt der Geraden, welche die Berührungspnnkte in den genannten beiden Fällen verbinden; w. z. b. w.

580. Zieht man von zwei beliebigen Punkten (R, S Fig. 451.) ausserhalb eines Kreises Tangentenpaare (SD, SE, RF, RG) an denselben nnd verbindet von den vier Berührungspunkten je zwei solche, welche nicht demselben Tangentenpaare zugehören, so bilden die Dnrchschnittspunkte (A, J) der Gegenseiten des so entstandenen Vierecks (DFEG) die beiden Aehnlichkeitspunkte für diejenigen Kreise, welche man von den genannten Punkten (R, S) ausserhalb als Mittelpunkten mit den zugehörigen Tangentenlängen als Radien beschreibt.

Anmerkung. Der nöthigen Kürze halber wollen wir in dem Nächstfolgenden unter Kreis S denjenigen verstehen, der von diesem Punkte aus mit der zuge-

hörigen Tangentenlänge (SD oder SE) als Radius beschrieben ist; und in ähnlichem Sinne natürlich gebrauchen wir die Ausdrücke Kreis R u. s. w.

Beweis. Die Kreise R und S werden vom Kreise B ungleichartig in G und E und vom Kreise H ebenso in F und D berührt, also J der innere Aehnlichkeitspunkt jener Kreise (A. 579, Z.). Dagegen berührt sowohl der Kreis K in F und E, als der Kreis Z (wo Z den in der Figur nicht sichtbaren Durchschnittspunkt der Tangenten GR und DS bezeichnet) in G und D unsere Kreise R und S von innen, also gleichartig, folglich A äusserer Aehnlichkeitspunkt dieser Kreise (A. 578); w. z. b. w.

Zusatz 1. Die vier Punkte A, R, J, S liegen demnach in einer geraden Linie.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 576, da RS die Axe und A und J die Aehnlichkeitspunkte.

Zusatz 2. Betrachtet man Viereck DFEG als ursprünglich gegeben, so kann man den vorigen Satz auch so aussprechen: Zieht man an je zwei Gegenecken eines Kreisvierecks Tangenten, so liegen die beiden Durchschnittspunkte derselben mit den beiden Durchschnittspunkten der Gegenseiten in gerader Linie.

Zusatz 3. Da die Kreise S und H sich in D von innen berühren, die Kreise S und B dagegen in E von aussen, so geht DE durch den innern Aehnlichkeitspunkt der Kreise B und H (A 579); ebenso leicht sieht man, dass die Kreise R und B sich in G von innen, die Kreise R und H aber in F von aussen berühren; die Gerade FG geht also gleichfalls durch den innern Aehnlichkeitspunkt der Kreise B und H (A. 579); d. h. der Durchschnittspunkt M der Diagonalen ist der innere Aehnlichkeitspunkt dieser Kreise.

Zusatz 4. Die Kreise B und H werden vom Kreise K von aussen in E und F, vom Kreise Z (Z Durchschnittspunkt der Tangenten RG und DS) aber von innen in G und D berührt; also ist A der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise B und H (A. 578).

Zusatz 5. Es liegen also auch die Punkte A, B, M, H in gerader Linie.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 576, da BH die Axe und A und M die Aehnlichkeitspunkte sind.

Zusatz 6. Die Kreise Z und B berühren sich in G von innen, die Kreise K und B dagegen in E von aussen, folglich geht GE durch den innern Aehnlichkeitspunkt der Kreise Z und K

(A. 579); ferner berühren sich die Kreise Z und H in D von innen, die Kreise K und H dagegen in F von aussen, daher geht DF gleichfalls durch den innern Aehnlichkeitspunkt der Kreise Z und K; d. h. der Durchschnittspunkt J der Gegenseiten GE und DF des Vierecks DFEG ist der innere Aehnlichkeitspunkt dieser Kreise. Ferner werden die Kreise Z und K vom Kreise S in D und E von innen und vom Kreise R in G und F ebenfalls von innen berührt; die Geraden DE und GF gehen also durch den äussern Aehnlichkeitspunkt der Kreise Z und K (A. 578); d. h. der Durchschnittspunkt M der Diagonalen des Vierecks DFEG ist der äussere Aehnlichkeitspunkt dieser Kreise. Da nun KZ die Axe, J und M die beiden Aehnlichkeitspunkte sind, so liegen die Punkte M, K, J, Z in gerader Linie (A. 576).

Zusatz 7. Ist also ein Viereck in einen Kreis beschrieben und ein anderes um denselben so, dass die Ecken jenes mit den Berührungspunkten dieses zusammenfallen, so haben ihre beiderseitigen Diagonalen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Beweis. Die Gegenecken B und H des umschriebenen Vierecks BZHK liegen mit dem Durchschnittspunkte M der Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks DFEG in gerader Linie (Z. 5) und ebenso die Gegenecken Z und K (Z. 6), folglich schneiden sich die beiderseitigen Diagonalen in einem Punkte.

Fassen wir den Inhalt unseres Hauptsatzes und seiner sieben Zusätze in ein Resultat zusammen, so erhalten wir folgenden Lehrsatz:

581. Beschreibt man in einen Kreis ein beliebiges unregelmässiges Viereck, zieht an jede seiner Ecken eine Tangente, verlängert dieselben, bis je zwei sich schneiden, so lassen sich aus diesen sechs Durchschnittspunkten und denen der drei zugeordneten Seitenpaare drei Quaternionen bilden, die so beschaffen sind, dass die zu jeder gehörigen Punkte in gerader Linie liegen. Jede Quaternion wird aus zwei Tangentendurchschnitten und aus zwei Durchschnittspunkten zugeordneter Seiten gebildet, die beiden letztern sind die Aehnlichkeitspunkte zu den Kreisen, welche man von den erstern aus mit den zugehörigen Tangentenlängen beschreibt.

582. Beschreibt man in einen Kreis ein beliebiges unregelmässiges Sechseck, verlängert je zwei Gegenseiten, bis sie sich

schneiden, so liegen diese drei Durchschnittspunkte in einer geraden Linie.

Beweis. Es sei ABCDEF (Fig. 452.) das Sechseck; die Durchschnittspunkte der Gegenseiten G, H, J; die Durchschnittspunkte der an zwei Gegenecken gezogenen Tangenten K, L, M. Nun ist, wenn man AC und DF zieht, in Viereck ACDF der Punkt J der Durchschnittspunkt zweier Gegenseiten, folglich ein Aehnlichkeitspunkt der Kreise K und M (A. 580), und da dieselben vom Kreise S ungleichartig in A und D berührt werden, so ist J der innere Aehnlichkeitspunkt jener Kreise (A. 579).

Auf analoge Weise zeigt man, dass H der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise L und M und G der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise K und L ist.

Mithin liegen die Punkte G, H, J in gerader Linie (A. 577); w. z. b. w.

Anmerkung 1. Da der Lehrsatz A. 580 für vier ganz beliebige Punkte im Umfange eines Kreises gilt, so gilt auch der darauf gestützte Beweis für die in Rede stehende Eigenschaft des Kreissechsecks allgemein und für jede Art desselben.

Anmerkung 2. Man pflegt unsern Lehrsatz nicht selten nach seinem ersten Entdecker: Pascal's Lehrsatz zu nennen.

Anmerkung 3. In einzelnen Fallen kann es geschehen, dass die Punkte G, H, J die drei äussern Aehnlichkeitspunkte der Kreise K, L und M sind. Ist z. B. das Sechseck ABCDEF (Fig. 453.) gegeben, in welchem die Winkel bei B und E ausspringende sind, so sind G, H, J die Durchschnittspunkte der Gegenseiten, K, L, M die Durchschnittspunkte der an zwei Gegenecken gezogenen Tangenten. Nun werden die Kreise K und M vom Kreise P in D und C und vom Kreise S in A und F von innen berührt; daher sind CD und AF äussere Aehnlichkeitslinien und ihr Durchschnittspunkt J der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise K und M (A. 378); auf ähnliche Weise zeigt man, dass H der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise M und L und G der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise K und L ist.

Zusatz 1. Nach A. 580, Z. 2 ist auch J mit K und M in gerader Linie, ebenso H mit M und L und G mit K und L. (Fig. 452 und 453).

Zusatz 2. Von den sechs Punkten also, welche man in den drei Durchschnittspunkten je zweier Gegenseiten eines in einen Kreis beschriebenen Sechsecks und den drei Durchschnittspunkten der an je zwei Gegenecken gezogenen Tangenten hat, liegen viermal drei in gerader Linie.

Zusatz 3. Verbindet man ein Paar Gegenseiten wie AB und DE unseres eingeschriebenen Sechsecks (Fig. 452 und 453.),

so liegen nach A. 581 die Punkte G und T als Durchschnittspunkte zwei zugeordneter Seitenpaare mit den Durchschnittspunkten K und L der an ihre Gegenecken gezogenen Tangenten in gerader Linie, und aus ähnlichem Grunde liegen in gerader Linie die Punkte N, U, Q, T und V, U, W, G. Dasselbe gilt natürlich von jedem andern Viereck, wie ABEF u. s. w.

Zusatz 4. Nimmt man daher auf der Peripherie eines Kreises sechs beliebige Punkte so, dass nicht nur je zwei der funfzehn durch sie bestimmten Sehnen, sondern auch je zwei der sechs an sie gezogenen Tangenten bei hinreichender Verlängerung sich schneiden, so erhält man fünfundvierzig Quaternionen von Punkten, die in gerader Linie liegen.

Beweis. Durch die Sehnen wird das Sechseck in funfzehn Vierecke getheilt, und nach Z. 3 hat man für jedes Viereck drei, mithin für alle funfzehn: fünfundvierzig Quaternionen von Punkten.

583. Beschreibt man um einen Kreis ein beliebiges Sechseck und zieht die Diagonalen, welche je zwei Gegenecken verbinden, so haben diese stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Beweis. Es sei NOPQRS (Fig. 452 und 453.) das umschriebene Sechseck; verbindet man die Berührungspunkte A, B, C, D, E, F unter einander, so sind diese als Berührungssehnen beziehungsweise die Polaren, zu denen die Ecken des äussern Vielecks als Pole gehören (A. 567); daher ist der Durchschnittspunkt je zweier der Pol für die durch die zugehörigen Ecken des äussern Vielecks gehende Gerade als Polare (A. 564), also J der Pol für SP, H für RO, G für NQ; da aber G, H, J in gerader Linie liegen (A. 582), so haben ihre Polaren einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt in Z (A. 561, Z. 1); w. z. b. w.

584. Beschreibt man sowohl in, als um einen Kreis ein Sechseck und zwar so, dass die Ecken jenes mit den Berührungspunkten dieses zusammenfallen, so ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt (A. 583) der drei Diagonalen, welche je zwei Gegenecken des äussern Sechsecks verbinden, der Pol für die Gerade (A. 582), auf welcher die Durchschnittspunkte je zweier Gegenseiten des innern liegen.

Beweis. Es sei ABCDEF (Fig. 452 und 453.) das innere und NOPQRS das äussere Sechseck, so ist, wie im Beweise des vorigen Satzes gezeigt wurde, J der Pol für SP und H der Pol für

RO, folglich ihr Durchschnittspunkt Z der Pol für die Gerade GH (A. 564); da aber die dritte der in Rede stehenden Diagonalen, NQ, ebenfalls durch den Punkt Z geht (A. 583) und der dritte der in Rede stehenden Durchschnittspunkte zweier Gegenseiten des innern Sechsecks, G, mit den beiden andern H und J in gerader Linie liegt (A. 582), so liegen die drei Punkte G, H, J auf der Geraden, welche die Polare für den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt Z der drei in Rede stehenden Diagonalen als Pol ist; w. z. b. w.

585. Beschreibt man in einen Kreis ein beliebiges Fünfeck, zieht an eine der Ecken eine Tangente und verlängert sie bis zum Durchschnitt mit der Gegenseite, so liegt dieser Durchschnittspunkt mit denen von je zwei solchen der vier übrigen Seiten, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, in gerader Linie.

Beweis. ABCDE (Fig. 454.) sei das eingeschriebene Fünfeck; F der Durchschnittspunkt der an die Ecke A gezogenen Tangente mit der dieser Ecke gegenüberliegenden verlängerten Seite DC; G und H seien die Durchschnittspunkte von je zwei solchen der vier übrigen Seiten, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben. Man ziehe an die vier übrigen Ecken Tangenten und verlängere sie, bis sie sich gegenseitig und die zuerst gezogene Tangente schneiden, alsdann ist PQ die Axe der Kreise P und Q, und da diese beiden Kreise vom Kreise N in C und D gleichartig berührt werden, so ist F ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt (A. 576 und A. 578). Ferner werden die Kreise P und O vom Kreise M in C und B, vom Kreise K in A und E ungleichartig berührt, mithin G innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise P und O (A. 379). Ebenso ist H der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise O und Q (A. 379), da sie durch den Kreis L in B und A, durch Kreis J in E und D ungleichartig berührt werden.

Folglich liegen die Punkte F, G, H in einer geraden Linie (A. 577); w. z. b. w.

586. Wird dagegen ein beliebiges Fünfeck um einen Kreis beschrieben, und man verbindet von vier seiner Ecken je zwei solche, die nicht an derselben Seite liegen, so liegt der Durchschnittspunkt dieser Verbindenden stets auf der Geraden, welche die fünfte Ecke mit dem Berührungspunkte der Gegenseite verbindet.

Beweis. Es sei JKLMN (Fig. 454.) das umschriebene Fünfeck; verbindet man die Berührungspunkte A, B, C, D, E untereinander, so sind diese Geraden, als Berührungssehnen, beziehungsweise die Polaren für die Ecken des äussern Fünfecks als Pole (A. 567); daher ist der Durchschnittspunkt je zweier von ihnen der Pol für die durch die entsprechenden Ecken gehende Gerade als Polare (A. 564); also H der Pol für JL als Polare und G der Pol für KM als Polare. Ferner ist der Berührungspunkt A der Pol für die durch diesen Punkt gehende Tangente AF (A. 562, Z. 4) und N der Pol für die Berührungssehne CD (A. 567), folglich AN die Polare für den Punkt F als Pol (A. 564). Da aber die Punkte F, G, H in einer geraden Linie liegen (A. 585), so schneiden sich ihre zugehörigen Polaren in einem Punkte (A. 564, Z. 1); es liegt also der Durchschnittspunkt R der in Rede stehenden Verbindenden JL und KM auf der Geraden AN, welche die fünfte Ecke N mit dem Berührungspunkte A der Gegenseite KL verbindet; w. z. b. w.

587. Beschreibt man sowohl in, als um einen Kreis ein Dreieck und zwar so, dass die Berührungspunkte des letzteren mit den Ecken des ersteren zusammenfallen, so liegen die drei Durchschnittspunkte der Seiten des innern Dreiecks mit den durch ihre Gegenecken gehenden Seiten des äussern in gerader Linie.

Beweis. Es sei △ ABC (Fig. 455.) das eingeschriebene, △ DEF das umschriebene und G, H, J seien die drei in Rede stehenden Durchschnittspunkte. Es werden die Kreise D und E, deren Axe DE ist, vom Kreise F gleichartig in A und C berührt, mithin G äusserer Aehnlichkeitspunkt derselben (A. 576 und 578). Aus ähnlichen Gründen ist H der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise E und F, und ebenso J der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise D und F; folglich liegen die Punkte G, H, J in einer geraden Linie (A. 577); w. z. b. w.

588. Beschreibt man in einen Kreis ein beliebiges Fünfeck (ABDEF Fig. 456.), verlängert ein Paar nicht anliegender Seiten (AB, DE) bis zum Durchschnitt (G), verbindet die beiden Endpunkte (B, D) der zwischen den verlängerten liegenden Seite mit einem beliebigen Punkte (C) im Umkreise, und verlängert jede derselben bis zum Durchschnitt mit der Seite des Fünfecks, welche der Ecke gegenüberliegt, von der die Verbindende selbst ausgeht, so liegen diese beiden Durchschnittspunkte (H, J) mit dem Durchschnittspunkt (G) der zuerst verlängerten Seiten in gerader Linie.

Beweis. Für das Kreissechseck ABCDEF, d. h. dessen successive Seiten die Geraden AB, BC, CD, DE, EF, AF, sind unsere in Rede stehenden Pnnkte G, H, J die Durchschnitte je zweier Gegenseiten, folglich liegen diese Punkte in einer geraden Linie (A. 582); w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz gehört Maclaurin; er theilte ihn zuerst mit in seinem Werke: Treatise of Fluxions §. 623. Man sieht aus unserm Beweise, dass er nur ein besonderer Fall des Pascal'schen Satzes (A 582) ist.

589. Erklärung. Im fünften Buche (251 und 256) ist erwiesen, dass, wenn man durch einen beliebigen Punkt in der Ebene eines Kreises gerade Linien zieht, die diesen letztern schneiden, alle die Rechtecke, die aus denjenigen Segmenten jeder dieser Geraden gebildet werden, welche zwischen diesem Punkte und den Durchschnittspunkten mit dem Umkreise liegen, einen constanten Flächeninhalt haben. Dieser Flächenraum soll künftig der Kürze halber den Namen Potenz führen, und zwar wollen wir, insofern von einem bestimmten Punkte und Kreise die Rede ist, sagen: Potenz des Punktes für den Kreis, oder Potenz des Kreises für den Pnnkt. Wir wollen diese Potenzen noch durch die Beinamen äussere und innere unterscheiden, je nachdem der zugehörige Punkt ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

Zusatz 1. Das Maass für die Grösse jeder äusseren Potenz ist das Quadrat der von dem zugehörigen Punkte nach dem Kreise gezogenen Tangente.

Beweis folgt unmittelbar aus 259.

Zusatz 2. Der Halbirungspunkt der gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise ist daher ein Punkt, der gleiche Potenzen für beide Kreise hat.

Beweis folgt unmittelbar aus Zusatz 1.

Zusatz 3. Das Maass für die innere Potenz eines Punktes ist das Quadrat der zugehörigen halben Mittelsehne, d. h. derjenigen, welche auf dem Durchmesser, der durch den zur Potenz gehörigen Punkt geht, in diesem Punkte senkrecht steht.

Beweis. Es sei C (Fig. 457.) der Punkt; man ziehe durch C den Durchmesser DE und errichte auf demselben in C die Senkrechte GF; ziehe ausserdem durch C die beliebige Sehne AB, so ist $CG = \frac{1}{2}GF$ (248),

also $\frac{1}{4}GF^2 = CG^2 = CD \cdot CE$ (252) $= AC \cdot CB$ (251); w. z. b. w.

Zusatz 4. Die Potenz jedes Punktes im Umfange ist gleich Null.

Beweis. Eines der Segmente der Geraden, die man von dem Punkte nach dem Umkreise zieht, welche zwischen diesem Punkte und den Durchschnittspunkten mit dem Umkreise liegen, wird, wenn der Punkt selbst im Umfange liegt, gleich Null, folglich auch die Potenz; w. z. b. w.

590. Der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, welche für einen gegebenen Kreis gleiche Potenzen haben, ist die Peripherie eines mit dem gegebenen concentrischen Kreises.

Beweis. Es sei ABCDA (Fig. 458.) der gegebene Kreis, EFGE ein beliebiger mit ihm concentrischer. Man ziehe von beliebigen Punkten E, G dieses letzteren Tangenten an den gegebenen, verbinde ihre Endpunkte mit dem Mittelpunkte, so sind die so entstandenen rechtwinkeligen (243) Dreiecke AEK und DGK congruent (46), also AE = DG, d. h. alle Tangenten, die man von beliebigen Punkten im Umfange des concentrischen Kreises an den gegebenen zieht, sind von gleicher Länge, daher sind auch deren Quadrate gleich gross, und mithin ist die Peripherie des mit dem gegebenen concentrischen Kreises der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, welche für den gegebenen Kreis gleiche äussere Potenzen haben (A. 589, Z. 1), wenn ersterer grösser als der gegebene Kreis ist. Ist der concentrische Kreis, wie HJLH, kleiner als der gegebene, so ziehe man von beliebigen Punkten B, C dieses letzteren an den mit ihm concentrischen Tangenten, vollende wieder die rechtwinkeligen Dreiecke BHK und CJK, so sind diese congruent (46), also BH = CJ, d. h. alle Tangenten, die man von beliebigen Punkten im Umfange des gegebenen Kreises an den mit ihm concentrischen zieht, sind von gleicher Länge, daher sind auch deren Quadrate gleich gross; diese Tangenten aber sind halbe Sehnen für den gegebenen Kreis (248) und ihre Berührungspunkte die Halbirungspunkte der ganzen Sehnen, mithin ist der geometrische Ort aller Punkte, welche für den gegebenen Kreis gleiche innere Potenzen haben, die Peripherie eines mit dem gegebenen concentrischen Kreises (A. 589, Z. 3), der kleiner als jener ist; w. z. b. w.

Anmerkung. Da die Punkte, deren Potenz gleich Null ist, im Umfange des gegebenen Kreises liegen, so bleibt unser Satz für diesen Fall auch noch insofern wahr, als der zu construirende concentrische Kreis mit der Peripherie des gegebenen zusammenfällt.

Zusatz. Haben daher mehrere Punkte gleiche äussere Potenzen für einen Kreis, so sind die dem Kreise umschriebenen Winkel, deren Scheitel jene Punkte sind, von gleicher Grösse.

Beweis. Aus der Congruenz der Dreiecke AEK und DGK folgt: $\angle AEK = \angle DGK$; diese Winkel sind aber die halben umschriebenen (250, 3), also sind auch die ganzen einander gleich.

591. Hat ein Punkt für zwei Kreise gleiche und gleichartige Potenzen, so ist die Differenz der Quadrate seiner Entfernungen von den Mittelpunkten dieser Kreise gleich der Differenz der Quadrate ihrer Halbmesser; ist also eine constante, von der besondern Lage des Punktes unabhängige Grösse.

Beweis. a. Es sei FG (Fig. 459.) die gemeinschaftliche Tangente der Kreise B und C, so ist der Halbirungspunkt A ein Punkt gleicher äusserer Potenzen für beide Kreise (A. 589, Z. 2); zieht man AB, AC und nach den Berührungspunkten die Radien, so ist

$$\left.\begin{aligned} AF_q &= AB_q - BF_q \\ AG_q &= AC_q - CG_q \end{aligned}\right\} (87, Z. 2)$$

$$AF_q = AG_q \text{ (Constr.)},$$

folglich $AB_q - BF_q = AC_q - CG_q$,

also auch $CG_q - BF_q = AC_q - AB_q$.

b. Es sei ferner DE (Fig. 460.) die gemeinschaftliche Sehne der sich schneidenden Kreise B und C; man ziehe die Axe BC, so ist $AD = AE$ und $AD \perp BC$ (264), folglich der Punkt A ein Punkt gleicher innerer Potenzen für beide Kreise (A. 589, Z. 3). Zieht man BD und CD, so ist

$$\left.\begin{aligned} AD_q &= BD_q - AB_q \\ &= CD_q - AC_q \end{aligned}\right\} (87, Z. 2),$$

folglich auch $BD_q - CD_q = AB_q - AC_q$; w. z. b. w.

Zusatz. Es gibt daher für zwei Kreise unendlich viele Punkte gleicher Potenzen.

591b. Umgekehrt, ist die Differenz der Quadrate der Entfernungen eines Punktes von den Mittelpunkten zweier Kreise gleich der Differenz der Quadrate ihrer Halbmesser, so ist dieser Punkt ein Punkt gleicher und gleichartiger Potenzen für die Kreise.

Beweis. Es sei A der gegebene Punkt (Fig. 459.); man ziehe von A aus an jeden Kreis eine Tangente und die Radien nach den Berührungspunkten, so ist

$$AC_q - AB_q = CG_q - BF_q \text{ (V.)},$$

also auch $AC_q - CG_q = AB_q - BF_q$,

und folglich $AG_q = AF_q$ (87, Z. 2).
Daher ist A ein Punkt gleicher und gleichartiger Potenzen für beide Kreise (A. 589, Z. 1); w. z. b. w.

Zusatz 1. Berühren daher zwei Kreise einander, so ist der Berührungspunkt ein Punkt gleicher Potenzen für sie.

Beweis. Der Berührungspunkt liegt im Umfange beider Kreise, die Potenz desselben ist also für beide Kreise gleich Null (A. 589, Z. 4).

Zusatz 2. Schneiden zwei Kreise einander, so ist jeder Durchschnittspunkt ein Punkt gleicher Potenzen für sie.

Beweis wie der von Zusatz 1.

592. Erklärung. Potenzlinie zweier Kreise heisst der geometrische Ort aller Punkte (A. 591, Z.) gleicher Potenzen für sie.

Anmerkung. Französische Schriftsteller, besonders die Verfasser der hierher gehörigen Abhandlungen in den Annales de Mathem. etc. p. Gergonne, nennen diese Linie: axe radical de deux cercles.

593. Die Potenzlinie zweier Kreise ist eine Gerade, welche
1) auf der Axe senkrecht steht und
2) dieselbe in einem Punkte schneidet, dessen Entfernungen von den näheren Durchschnittspunkten der Axe mit den Umkreisen sich umgekehrt verhalten, wie die von den entfernteren.

Beweis. 1. Nach A. 184 ist der geometrische Ort aller der Punkte, für welche die Differenz der Quadrate ihrer Entfernungen von den Endpunkten einer Geraden eine constante Grösse ist, eine Gerade, welche auf der erstern senkrecht steht; diese constante Grösse ist aber gleich derjenigen, durch welche die Lage eines Punktes, der gleiche Potenzen für zwei Kreise hat, bestimmt wird (A. 591[b]); folglich ist der geometrische Ort aller Punkte, welche für zwei Kreise gleiche Potenzen haben, eine zur Axe der Kreise senkrechte Gerade.

2. Ist DE (Fig. 460.) die Potenzlinie der Kreise B und C, so ist $DE \perp BC$ nach 1 und A ein Punkt gleicher Potenzen für beide Kreise (A. 592); es ist aber

$$AD_q = AF_r AJ = AG_r AH \ (252),$$

daher $AJ : AH = AG : AF$.

Liegen die Kreise aussereinander, so hat man nur von dem Punkte, in welchem die Potenzlinie die Axe schneidet, Tangenten an die

Kreise zu ziehen, so erhält man nach 259 gleichfalls das obige Resultat; w. z. b. w.

Zusatz 1. Die Potenzlinie zweier Kreise ist daher völlig bestimmt und bekannt, wenn man nur einen einzigen ihr zugehörigen Punkt kennt; denn man braucht nur von ihm aus eine Senkrechte auf die Axe zu fällen, so ist diese Senkrechte die Potenzlinie.

Zusatz 2. Für zwei sich berührende Kreise ist die Potenzlinie ihre gemeinschaftliche Tangente.

Beweis. Der Berührungspunkt ist ein Punkt gleicher Potenzen (A. 591, Z. 1); eine Senkrechte in diesem Punkte auf der Axe errichtet ist daher die Potenzlinie, aber auch gleichzeitig die gemeinschaftliche Tangente.

Zusatz 3. Für zwei sich schneidende Kreise ist die Potenzlinie die gemeinschaftliche Sehne in ihrer unbegrenzten Verlängerung.

Beweis. Vergl. Beweis zu A. 591.

Zusatz 4. Die Halbirungspunkte der vier gemeinschaftlichen Tangenten, die sich an zwei Kreise ziehen lassen, liegen in gerader Linie.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 589, Z. 2 und A. 592.

Zusatz 5. Liegt die Potenzlinie zweier Kreise ganz ausserhalb des einen, so muss sie auch ausserhalb des andern liegen.

Beweis folgt unmittelbar aus Zus. 2 und Zus. 3.

Zusatz 6. Liegen zwei Kreise entweder ganz aussereinander, oder der eine ganz innerhalb des andern, so kann ihre Potenzlinie keinem von beiden begegnen.

Beweis. Liegen die Kreise ganz aussereinander, so kann ihre Potenzlinie keinem begegnen, weil sie durch die Halbirungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten geht (Z. 4), und diese Punkte natürlich ausserhalb der Kreise liegen.

Liegt einer der Kreise D (Fig. 459.) ganz innerhalb des andern, so kann die Potenzlinie ebenfalls keinem begegnen; denn schnitte sie beide Kreise, wie z. B. HE, und man zöge CE und DE, so wäre E ein Punkt gleicher Potenzen für beide Kreise (A. 592), daher $CE^2 - DK^2 = CE^2 - DE^2$ (A. 591),
also $DK^2 = DE^2$, was offenbar nicht möglich ist. Auf einen ähnlichen Widerspruch würde man stossen, wenn man annähme, die Potenzlinie schnitte nur den äussern und berührte den innern, oder schnitte den äussern und träfe den innern gar nicht, oder berührte den äussern; da nun keiner dieser Fälle mög-

lich ist, so muss die Potenzlinie ausserhalb beider Kreise liegen und kann dieselben nicht treffen; w. z. b. w.

594. Die drei Potenzlinien dreier Kreise haben stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Beweis. Bezeichnet man die Kreise mit M_1, M_2, M_3; ihre Radien beziehungsweise mit R_1, R_2, R_3; zieht die Potenzlinien von M_1 und M_2 und von M_2 und M_3 und bezeichnet die Entfernungen des Durchschnittspunktes derselben von den Mittelpunkten bezüglich mit D_1, D_2, D_3, so ist

$$\left.\begin{aligned} D_1^2 - D_2^2 &= R_1^2 - R_2^2 \\ D_3^2 - D_2^2 &= R_3^2 - R_2^2 \end{aligned}\right\} \text{(A. 591)},$$

mithin $$D_1^2 - D_3^2 = R_1^2 - R_3^2.$$

Es ist also der Durchschnittspunkt der beiden Potenzlinien ein Punkt gleicher Potenzen für die Kreise M_1 und M_3 (A. 591[b]); daher geht die Potenzlinie dieser beiden Kreise auch durch den Durchschnittspunkt der beiden andern Potenzlinien (A. 592 und A. 593, Z. 1); w. z. b. w.

Zusatz 1. Daher haben die gemeinschaftlichen Tangenten dreier Kreise, von denen jeder die beiden andern berührt, immer einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Beweis. Die gemeinschaftlichen Tangenten sind die Potenzlinien der Kreise (A. 593, Z. 2); daher schneiden sie sich in einem Punkte (A. 594).

Zusatz 2. Dasselbe gilt von den gemeinschaftlichen Sehnen dreier sich schneidender Kreise.

Beweis folgt, wie der vorige, unmittelbar aus dem Hauptsatze, verbunden mit A. 593, Z. 3.

595. Erklärung. Spricht man von dem Winkel, unter welchem sich zwei Kreise schneiden, so versteht man darunter denjenigen, welchen die beiden Tangenten bilden, die man an die beiden Kreise in einem ihrer Durchschnittspunkte zieht.

Anmerkung 1. Dieser Winkel ist, wie leicht zu sehen, für einen der Durchschnittspunkte von derselben Grösse, wie für den andern.

Anmerkung 2. Bei zwei sich berührenden Kreisen fallen die beiden zu ziehenden Tangenten mit der gemeinschaftlichen Tangente zusammen, daher wird der in Rede stehende Winkel gleich Null.

596. Ein Kreis schneidet zwei andere rechtwinkelig, wenn sein Mittelpunkt auf ihrer Potenzlinie liegt, und sein Halbmesser gleich dem Potenzmaasse dieses Punktes, d. h. der von diesem Punkte an einen der Kreise gezogenen Tangente gleich ist.

Beweis. Es sei DE (Fig. 461.) die Potenzlinie der Kreise A nnd B; man ziehe von einem beliebigen Punkte C derselben die Tangenten CF und CG an die Kreise, so ist $CF_q = CG_q$ (A. 592 und A. 589, Z. 1), also auch CF = CG; beschreibt man daher aus C als Mittelpunkt mit CF als Radius einen Kreis, so ist derselbe der zu construirende dritte Kreis. Zieht man noch AF und BG, so ist $\angle AFC = \angle BGC = R$ (243), da aber CF und CG Radien des Kreises C sind, so sind die Halbmesser AF und BG der Kreise A und B Tangenten des Kreises C, folglich schneidet Kreis C die Kreise A und B rechtwinkelig (A. 595); w. z. b. w.

Anmerkung. Einen Kreis, der zwei andere rechtwinkelig schneidet, nennen französische Schriftsteller den „cercle radical" der erstern, weil sein Mittelpunkt auf deren „axe radical" (A. 592, Anmk.) liegt.

597. Zwei Kreise, die zwei andere ganz aussereinander liegende Kreise rechtwinkelig schneiden, müssen sich selbst immer schneiden.

Beweis. Es sei CD (Fig. 462.) die Potenzlinie der aussereinander liegenden Kreise A nnd B. Beschreibt man von zwei beliebigen Punkten C nnd D derselben als Mittelpunkten mit den von ihnen nach den Kreisen gezogenen Tangenten CG und DF als Halbmessern Kreise, so werden die Kreise B und A von den Kreisen C und D rechtwinkelig geschnitten (A. 596), und da nun $\angle DFB = \angle CGB = R$ nnd DF, CG die Radien der Kreise D und C sind, so sind BF und BG Tangenten derselben (242), aber BF = BG als Radien des Kreises B, folglich ist B ein Punkt gleicher Potenzen für die Kreise C und D (A. 589, Z. 1); aus ähnlichen Gründen ist auch der Mittelpunkt A ein Punkt gleicher Potenzen für die genannten Kreise, daher also die Axe AB der Kreise A und B die Potenzlinie der Kreise C und D (A. 592). Zieht man noch EF, so ist $ED \perp AB$ (A. 593),
also $\angle DEF + \angle FEB = R = \angle DFE + \angle EFB$.

Da aber die Kreise A und B aussereinander liegen, so begegnet ihre Potenzlinie keinem von beiden (A. 593, Z. 6), folglich

$$BE > BF,$$

mithin $\angle EFB > \angle FEB$ (42),

daher $\angle DEF > \angle DFE$,

folglich $DF > DE$ (41).

Es ist DF ein Radius des Kreises D, also muss der Punkt E innerhalb des Kreises liegen, und da der Punkt E ein Punkt der

Potenzlinie der Kreise C und D ist, so schneidet dieselbe den Kreis D, und hieraus folgt, dass sich die Kreise C und D schneiden müssen, da sie sich weder berühren können, noch ganz aussereinander liegen; denn im erstern Falle wäre ihre Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente (A. 593, Z. 2), im letztern Falle könnte sie keinem der Kreise begegnen (A. 593, Z. 6), und Beides widerspricht dem so eben Bewiesenen, dass die Potenzlinie den Kreis D schneidet; w. z. b. w.

598. Zwei Kreise dagegen, welche zwei andere sich schneidende rechtwinkelig schneiden, liegen ganz aussereinander, oder der eine liegt ganz innerhalb des andern.

Beweis. Wenn die Kreise C und D (Fig. 462.) sich schneiden, so ist die Gerade, die durch ihre Durchschnittspunkte geht, ihre Potenzlinie (A. 593, Z. 3). Man ziehe von zwei beliebigen, aber ausserhalb der Kreise liegenden Punkten A und B der Potenzlinie Tangenten AH, BF an die Kreise und beschreibe von A und B als Mittelpunkten mit AH und BF als Halbmessern Kreise, so schneiden dieselben die Kreise C und D rechtwinkelig (A. 596). Es ist also $\angle AHD = \angle DFB = R$

$DH = DF$ (als Radien), folglich

D ein Punkt gleicher Potenzen für die Kreise A und B (A. 589, Z. 1). Ebenso ist C ein solcher Punkt, mithin CD die Potenzlinie (A. 592); daher $CD \perp AB$,

also $\angle DEF + \angle FEB = R = \angle DFE + \angle EFB$.

Da aber der Punkt E, als Punkt der gemeinschaftlichen Sehne der Kreise C und D, innerhalb des Kreises D liegt, so ist

$DF > DE$,

folglich $\angle DEF > \angle DFE$ (42),

und daher $\angle EFB > \angle FEB$,

mithin $BE > BF$ (41).

BF ist ein Radius des Kreises B, es muss daher der Punkt E ausserhalb dieses Kreises liegen; aber $BE \perp CD$, folglich sind alle Geraden, die man von B aus nach CD zieht, grösser als BE (29), oder, jeder Punkt der Geraden CD liegt von der Peripherie des Kreises B weiter entfernt als der Punkt E, mithin liegt also CD ganz ausserhalb des Kreises B und kann demzufolge auch dem Kreise A nicht begegnen (A. 593, Z. 5), und hieraus folgt, dass beide Kreise ganz aussereinander, oder der eine ganz innerhalb des andern liegen muss, denn wenn sie sich berührten, so berührte CD

den Kreis B (A. 593, Z. 2), und wenn sie sich schnitten, so schnitte CD den Kreis B (A. 593, Z. 3), was im Widerspruch mit dem eben Bewiesenen stünde; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Da die Kreise A und B der Potenzlinie CD nicht begegnen können, so müssen natürlich ihre Peripherieen mit ihren Mittelpunkten auf derselben Seite von CD liegen, woraus offenbar hervorgeht, dass, wenn man die Punkte A und B so nimmt, dass sie auf verschiedenen Seiten von CD liegen, die Kreise ganz aussereinander zu liegen kommen, dagegen aber der eine ganz innerhalb des andern fällt, wenn man ihre Mittelpunkte auf derselben Seite von der Potenzlinie annimmt.

Anmerkung 2. Wenn die beiden rechtwinkelig geschnittenen Kreise sich berühren, so wird ihre Potenzlinie AB zur gemeinschaftlichen Tangente (A. 593, Z. 2), mithin wird also auch BF = BE und AH = AE (259, Z. 2), daher berühren sich in diesem Falle die Kreise A und B ebenfalls, und zwar in demselben Punkte, in welchem sich die beiden andern Kreise berühren.

Anmerkung 3. Liegt der eine von zwei rechtwinkelig geschnittenen Kreisen ganz innerhalb des andern, so ist, wenn man DK zieht, DE ⊥ AB (A. 593), also $\angle DEK = R$,

folglich $\angle DKE < R$ (38, Z. 4).

Daher muss DK den Kreis B schneiden (243), mithin ist, da DF eine Tangente des Kreises B, $DF > DK$ (250, Z. 3)

$DK > DE$ (41),

also $DF > DE$.

Es liegt also der Punkt E innerhalb des Kreises D, folglich muss derselbe die Linie CD jenseits des Punktes E, von D aus gerechnet, und daher auch die Linie AB schneiden, und da AB die Potenzlinie der Kreise C und D, so müssen sich (vergl. Bew. zu A. 597) die Kreise, welche zwei andere, von denen der eine ganz innerhalb des andern liegt, rechtwinkelig schneiden, selbst schneiden.

599. Die Peripherieen aller der Kreise, welche zwei andere, von denen jeder ganz ausserhalb des andern liegt, rechtwinkelig schneiden, gehen durch dieselben beiden Punkte, der Axe dieser letzteren, haben also diese Axe zur gemeinschaftlichen Potenzlinie.

Beweis. Werden die ganz aussereinander liegenden Kreise A und B (Fig. 462.) von zwei andern Kreisen, C und D, rechtwinkelig geschnitten, so schneiden sich diese letzteren (A. 597), und zwar auf der Axe der erstern, da, wie wir aus dem Beweise zu A. 597 wissen, diese Axe die Potenzlinie der letztern und mithin ein Stück, LM, derselben ihre gemeinschaftliche Sehne ist (A. 593, Z. 3). Nun ist aber auch die Axe der Kreise C und D die Potenzlinie der Kreise A und B (vergl. Bew. zu A. 598); beschreibt man daher von einem beliebigen Punkte N derselben, als Mittelpunkt, mit der

von. ihm aus an einen der Kreise A und B gezogenen Tangente, als Radius, einen Kreis, so schneidet dieser die Kreise A und B rechtwinkelig (A. 596), folglich müssen sich die Kreise N und D schneiden (A. 597), und zwar auf der Axe der Kreise A und B aus eben den Gründen, wie die für die Kreise C und D oben angeführten; da nun ein Kreis eine Gerade nur in zwei Punkten schneiden kann, Kreis D aber, wie gezeigt worden, die Gerade AB in L und M schneidet, so muss auch Kreis N die Gerade AB in den genannten Punkten schneiden; es gehen also die Peripherieen der Kreise C, D und N durch dieselben beiden Punkte, L und M, der Axe der Kreise A und B, nnd diese Axe ist ihre gemeinschaftliche Potenzlinie; dasselbe gilt auch für alle andern, den Kreisen C, D, N analog beschriebenen Kreise; w. z. b. w.

Anmerkung. Von den beiden Kreisen, welche rechtwinkelig geschnitten werden, kann auch der eine ganz innerhalb des andern liegen (vergl. A. 398, Anmk. 1).

600. Hat man zwei beliebige Kreise und beschreibt eine beliebige Menge anderer, von denen jeder die beiden erstern berührt oder schneidet, so ist der geometrische Ort für die Durchschnittspnnkte aller zusammengehörigen Paare der gemeinschaftlichen Tangenten oder Sehnen eine gerade Linie — die Potenzlinie der beiden ersten Kreise.

Beweis. Die Potenzlinien sich berührender Kreise sind ihre gemeinschaftlichen Tangenten (A. 593, Z. 2) und die Potenzlinien sich schneidender Kreise ihre gemeinschaftlichen Sehnen in ihrer unbegrenzten Verlängerung (A. 593, Z. 3); es schneiden sich aber die drei Potenzlinien dreier Kreise, also je zwei einem dritten, vierten, fünften n. s. w. Kreise und den gegebenen Kreisen zugehörigen Potenzlinien mit der Potenzlinie dieser letztern in einem Pnnkte (A. 594); daher liegen alle in Rede stehenden Durchschnittspunkte auf dieser Potenzlinie, sie ist also der geometrische Ort der genannten Durchschnittspunkte; w. z. b. w.

601. Wenn zwei Systeme von Kreisen so beschaffen sind, dass jedes eine gemeinschaftliche Axe hat, nnd die Axe des einen Systems die Potenzlinie des andern ist, so haben die gemeinschaftlichen Sehnen von einem Kreise des einen Systems mit einer beliebigen Anzahl von Kreisen des zweiten einen gemeinschaftlichen auf der Axe jenes ersten Systems liegenden Durchschnittspunkt.

Beweis. Die gemeinschaftlichen Sehnen eines Kreises des ersten Systems mit einer beliebigen Anzahl von Kreisen des zweiten sind ihre Potenzlinien (A. 593, Z. 3); es schneiden sich aber die drei Potenzlinien dreier Kreise, also die gemeinschaftlichen Sehnen des Kreises des ersten Systems mit einem ersten und zweiten Kreise des zweiten Systems und die Potenzlinie des zweiten Kreissystems in einem Punkte (A. 594); beschreibt man nun einen dritten, vierten, fünften u. s. w. Kreis des zweiten Systems, so muss die gemeinschaftliche Sehne jedes dieser Kreise mit dem Kreise des ersten Systems, als Potenzlinie, den Punkt treffen (A. 594), in welchem sich die gemeinschaftliche Sehne des letztern Kreises mit dem ersten Kreise des zweiten Systems, als deren Potenzlinie, und die Potenzlinie des zweiten Kreissystems schneiden; dieser gemeinschaftliche Durchschnittspunkt liegt also auf der zuletzt genannten Potenzlinie und mithin auf der Axe des ersten Kreissystems (V.); w. z. b. w.

602. Wenn ein beliebiger Kreis (C Fig. 463.) zwei andere (B, K) rechtwinkelig schneidet, so haben die vier Durchschnittspunkte (D, E, F, G) stets eine solche gegenseitige Lage, dass sich vier Kreise beschreiben lassen, von denen jeder die gegebenen Kreise (B, K) in zweien dieser Punkte berührt.

Beweis. Man ziehe in jedem der Kreise B und K die beiden Halbmesser nach den Punkten, in denen er von dem dritten C rechtwinkelig geschnitten wird, und verlängere sie so weit, bis je zwei sich schneiden, so sind diese vier Durchschnittspunkte M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der vier in Rede stehenden Berührungskreise. Zieht man im Kreise C die Radien nach seinen Durchschnittspunkten mit den beiden andern Kreisen, so ist:

$$M_1D = M_1E$$

als Tangenten des Kreises C (259, Z. 2, 243 und V.).

Ebenso ist:

$$M_2G = M_2F$$
$$M_3D = M_3G$$
$$M_4E = M_4F.$$

Der mit M_1D als Radius aus M_1 als Mittelpunkt beschriebene Kreis trifft daher die Kreise K und B in den Punkten D und E; da nun die durch den Mittelpunkt des Kreises K gehende Gerade M_1D die grösste ist, die man als Schneidende nach der Peripherie dieses Kreises ziehen kann (250), so kann Kreis M_1 nur den einzigen Punkt D mit dem Kreise K gemeinschaftlich haben, er be-

rührt ihn also in D von innen (236); dasselbe gilt in Betreff der Kreise M_1 und B. Auf ähnliche Weise zeigt man, dass M_2 die Kreise K und B in F und G von aussen, dass M_3 den Kreis K in D von innen und Kreis B in G von aussen und endlich Kreis M_4 Kreis K in F von aussen und den Kreis B in E von innen berühren; w. z. b. w.

Anmerkung. Dass die genannten Kreise in den genannten Punkten sich berühren, kann man auch darthun nach 263, Anmk., indem ihre Mittelpunkte um die algebraische Summe ihrer Halbmesser von einander entfernt sind.

Zusatz 1. Die Kreise M_1 und M_2 berühren die gegebenen gleichartig, der erstere von innen, der andere von aussen; für die beiden übrigen M_3, M_4 dagegen ist die Berührung ungleichartig.

Zusatz 2. Sowohl die Linie DE, als FG gehen daher durch den äussern Aehnlichkeitspunkt (A) unserer Kreise B und K; dagegen gehen DG und EF durch den innern Aehnlichkeitspunkt (J) derselben (A. 578 und 579). Wir erhalten daher den Satz:

603. Werden zwei gegebene Kreise von einer beliebigen Anzahl anderer rechtwinkelig geschnitten, und man verbindet von den vier jedem der schneidenden Kreise angehörigen Punkten je zwei solche, welche nicht auf derselben Peripherie eines der geschnittenen Kreise liegen, so hat der eine Theil dieser sämmtlichen Verbindenden einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt im äussern Aehnlichkeitspunkt der beiden zuletzt genannten Kreise, der andere Theil im innern Aehnlichkeitspunkte.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 602, Z. 2.

Zusatz 1. Die Geraden, welche von unsern vier Punkten je zwei solche verbinden, die auf der Peripherie eines und desselben der geschnittenen Kreise liegen, wie DF und EG, schneiden sich, wie leicht zu sehen, immer auf der Potenzlinie der Kreise B und K. Beschreibt man also mehrere solcher schneidender Kreise, so liegen die Durchschnittspunkte dieser Linienpaare in gerader Linie.

Beweis. DF ist die Potenzlinie der Kreise C und K (A. 593, Z. 3) und ebenso EG die Potenzlinie der Kreise C und B; durch den Durchschnittspunkt R dieser beiden Potenzlinien muss nun auch die Potenzlinie der Kreise B und K gehen (A. 594); aber CD = CE als Radien des Kreises C; dieser schneidet die Kreise B und K rechtwinkelig (V.), folglich CD und CE Tangenten der Kreise K und B (243), daher C ein Punkt gleicher Po-

tenzen derselben (A. 589, Z. 1) und mithin CR die Potenzlinie der Kreise B und K (A. 592); es schneiden sich also die Linien DF und EG auf der Potenzlinie der Kreise B und K; ähnlich ist der Beweis, dass sich auch alle andern in Rede stehenden Linienpaare auf der genannten Potenzlinie schneiden; mithin liegen sämmtliche Durchschnittspunkte in gerader Linie; w. z. b. w.

Zusatz 2. Die Durchschnittspunkte O, Q eben dieser Linien mit der Axe BK unserer Kreise sind für alle rechtwinkelig schneidende Kreise dieselben.

Beweis. Für alle die Kreise B und K rechtwinkelig schneidenden Kreise ist die Axe BK der ersteren die gemeinschaftliche Potenzlinie (vergl. Bew. zu A. 597) und die Potenzlinie der erstern die gemeinschaftliche Axe der letzteren (A. 596); daher haben die gemeinschaftlichen Sehnen aller den Kreis K rechtwinkelig schneidenden Kreise einen gemeinschaftlichen auf der Axe BK der Kreise B und K liegenden Durchschnittspunkt (A. 601); dasselbe gilt von den gemeinschaftlichen Sehnen aller den Kreis B rechtwinkelig schneidenden Kreise; da aber Kreis C die Kreise B und K rechtwinkelig schneidet (V.), so sind die Durchschnittspunkte O und Q der gemeinschaftlichen Sehnen mit der Axe BK diejenigen, durch welche alle in Rede stehenden Linien hindurchgehen; w. z. b. w.

604. Sind zwei Kreise (B und K Fig. 463.) gegeben, und man beschreibt einen beliebigen dritten (C), der sie rechtwinkelig schneidet, so liegen, wie wir bereits wissen (A. 603), zwei Paare dieser vier Durchschnittspunkte mit dem äussern und zwei Paare mit dem innern Aehnlichkeitspunkte der Kreise B und K in gerader Linie. Zieht man nun diese Geraden, so haben sowohl für den einen, als andern Aehnlichkeitspunkt die Rechtecke aus den Segmenten derselben, welche die Entfernungen des Aehnlichkeitspunktes von den zugehörigen Durchschnittspunkten messen (also einerseits die Rechtecke AD . AE, AF . AG und andererseits die Rechtecke JD . JG, JE . JF) einen constanten, von der besondern Beschaffenheit des schneidenden Kreises ganz unabhängigen Flächeninhalt.

Beweis. Nach A. 599 gehen alle Kreise, welche B und K rechtwinkelig schneiden, durch dieselben beiden Punkte (X, Y) ihrer Axe, alle Rechtecke der einen Klasse sind also dem Rechtecke AX . AY, alle der andern Klasse dem Rechtecke JX . JY gleich (256); w. z. b. w.

Anmerkung 1. Man kann unsern Satz auch so aussprechen: Zieht man durch einen der beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise eine beliebige Gerade, welche beide Kreise schneidet, so hat das Rechteck aus den Segmenten derselben, welche zwischen diesem Aehnlichkeitspunkte und zwei solchen Durchschnittspunkten mit den Kreisperipherieen liegen, zu denen keine parallelen Halbmesser gehören, einen constanten Flächeninhalt.

Anmerkung 2. Diese constanten Rechtecke sollen künftig den Namen führen: gemeinschaftliche Potenz zweier Kreise für ihren Aehnlichkeitspunkt.

605. Wenn zwei beliebige Kreise (B, K Fig. 463.), von denen jeder ganz ausserhalb des andern liegt, von einer beliebigen Menge von Kreisen rechtwinkelig geschnitten werden, so lässt sich immer von dem äussern Aehnlichkeitspunkte (A) der beiden erstern ein Kreis beschreiben, der die ganze Anzahl der sie rechtwinkelig schneidenden wiederum rechtwinkelig schneidet.

Beweis. Das Quadrat der Tangente, welche man von dem äussern Aehnlichkeitspunkte A der Kreise B und K an irgend einen der sie rechtwinkelig schneidenden zieht, ist gleich der gemeinschaftlichen Potenz eben dieser Kreise für ihren äussern Aehnlichkeitspunkt, also eine constante Grösse (259 und A. 604), also alle die Tangenten, die man von diesem Aehnlichkeitspunkte an die verschiedensten der rechtwinkelig schneidenden Kreise zieht, von gleicher Länge. Da nun dieser Aehnlichkeitspunkt auf der Potenzlinie der rechtwinkelig schneidenden Kreise liegt (vergl. Bew. zu A. 597), so schneidet der von ihm, als Mittelpunkt, mit der erwähnten Tangentenlänge, als Halbmesser beschriebene Kreis die sämmtlichen, die beiden gegebenen B und K rechtwinkelig schneidenden Kreise ebenfalls rechtwinkelig (A. 596); w. z. b. w.

606. Von dem innern Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise aus lässt sich immer ein dritter beschreiben, welcher unendlich viele andere Kreise — solche, von denen die beiden erstern rechtwinkelig geschnitten werden — so schneidet, dass seine Durchschnittspunkte mit einem jeden derselben Endpunkte eines seiner Durchmesser sind.

Beweis. Zöge man in einem der rechtwinkelig schneidenden Kreise, wie C (Fig. 463.), von dem innern Aehnlichkeitspunkte J der Kreise B und K die halbe Mittelsehne, so würde deren Quadrat gleich sein der gemeinschaftlichen Potenz der Kreise B und K für ihren innern Aehnlichkeitspunkt (252), würde also für alle

rechtwinkelig schneidende Kreise eine constante Grösse sein (A. 604); ein Kreis also, der von J aus als Mittelpunkt mit der Länge einer solchen halben Mittelsehne als Halbmesser beschrieben wird, muss auch die gleich grossen halben Mittelsehnen (A. 599) aller übrigen rechtwinkelig schneidenden Kreise zu Halbmessern haben; w. z. b. w.

607. Erklärung. Ein Kreis heisst Potenzkreis zweier andern (B, K Fig. 463.), wenn er von einem ihrer Aehnlichkeitspunkte aus mit der Geraden als Radius beschrieben wird, deren Quadrat das Maass für die diesem Aehnlichkeitspunkt zugehörige gemeinschaftliche Potenz dieser Kreise ist.

Zusatz 1. Der Halbmesser des äussern Potenzkreises, d. h. des vom äussern Aehnlichkeitspunkt (A) aus beschriebenen, ist also gleich der Tangente, die man von diesem Punkte an einen der Kreise zieht, welche die gegebenen Kreise B und K rechtwinkelig schneiden.

Beweis vergl. Bew. zu A. 605.

Zusatz 2. Der Radius des innern Potenzkreises ist die halbe Mittelsehne, die man von dem innern Aehnlichkeitspunkte aus in einem der Kreise zieht, welche die gegebenen rechtwinkelig schneiden.

Beweis vergl. Bew. zu A. 606.

608. Liegt ein Kreis ganz innerhalb eines andern, so schneidet der innere Potenzkreis beider alle diejenigen Kreise rechtwinkelig, von denen die beiden Urkreise selbst rechtwinkelig geschnitten werden; von dem äussern Potenzkreise dagegen werden eben diese Kreise so geschnitten, dass je zwei zusammengehörige Durchschnittspunkte Endpunkte eines Durchmessers dieses Potenzkreises sind.

Beweis. Es sei CR (Fig. 464.) die Potenzlinie der Kreise B und K, von denen der eine ganz innerhalb des andern liegt; man beschreibe von einem beliebigen Punkte C der Potenzlinie mit der nach einem der Kreise gezogenen Tangente als Radius einen Kreis, so schneidet derselbe die gegebenen Kreise rechtwinkelig (A. 596); verbindet man nun die Durchschnittspunkte D und G, so wie D und E, so geht die erstere dieser Verbindenden, DG, hinreichend verlängert, durch den innern Aehnlichkeitspunkt J, die andere, DE, durch den äussern A der Kreise B und K (A. 602, Z. 2), und es ist: JX . JY die innere, AX . AY die äussere gemeinschaftliche Potenz der genannten Kreise für ihre Aehnlichkeitspunkte (A. 604, Anmk. 2). Zieht man nun

a) von J aus eine Tangente JF an Kreis C und beschreibt aus J mit JF als Radius einen Kreis, so ist, da $JF^2 = JX . JY$ (259), Kreis J der innere Potenzkreis der Kreise B und K (A. 607), und weil $\angle JFC = R$ (243) und JF ein Radius des Kreises J, so ist CF eine Tangente desselben, mithin schneiden sich die Kreise J und C rechtwinkelig (A. 595). Dass sich Kreis J mit jedem andern Kreise, welcher die Kreise B nnd K rechtwinkelig schneidet, ebenfalls rechtwinkelig schneidet, wird auf ganz ähnliche Weise dargethan.

b) Zieht man ferner in dem die Kreise B und K rechtwinkelig schneidenden Kreise C durch den äussern Aehnlichkeitspunkt A jener Kreise die Mittelsehne LM, so ist:

$$AL = AM \text{ (248)}$$

und

$$AL . AM = AL^2 = AX . AY \text{ (251)};$$

beschreibt man daher aus A mit AL als Radius einen Kreis, so ist derselbe der äussere Potenzkreis der Kreise B nnd K (A. 607), und die Endpunkte seines Durchmessers LM sind die Punkte, in denen er den Kreis C schneidet. Auf ähnliche Weise zeigt man, dass der äussere Potenzkreis der Kreise B und K jeden andern dieselben rechtwinkelig schneidenden Kreis so schneidet, dass die Durchschnittspunkte Endpunkte eines seiner Durchmesser sind; w. z. b. w.

Anmerkung. Was in A. 607, Z. 1 und 2 in Betreff der Halbmesser der Potenzkreise zweier Kreise gesagt ist, gilt, wie man sieht, in umgekehrter Weise, wenn von den gegebenen Kreisen der eine ganz innerhalb des andern liegt; es ist nämlich in diesem Falle der Halbmesser des äussern Potenzkreises gleich der halben Mittelsehne, die man von dem äussern Aehnlichkeitspunkte aus in einem der Kreise zieht, welche die gegebenen rechtwinkelig schneiden; und der Radius des innern Potenzkreises ist gleich der Tangente, die man vom innern Aehnlichkeitspunkte an einen der Kreise zieht, welche die gegebenen rechtwinkelig schneiden. Der Grund ist folgender: die Geraden DE und GH, welche sich im äussern Aehnlichkeitspunkte der Kreise B und K schneiden (A. 603), sind die Diagonalen des Vierecks DGEH, um welches Kreis C beschrieben ist; ihr Durchschnittspunkt A muss daher innerhalb dieses Kreises liegen, und desshalb ist die halbe Mittelsehne, die man von ihm aus im Kreise C zieht, das Maass für die gemeinschaftliche Potenz der Kreise B und K für ihren äussern Aehnlichkeitspunkt (251 und 252). Die Geraden DG und EH dagegen schneiden sich im innern Aehnlichkeitspunkte der genannten Kreise (A. 603); da dieselben aber Gegenseiten des Vierecks DGEH sind, so müssen sie sich verlangert nothwendig ausserhalb des Kreises C schneiden, und desshalb ist die Tangente, die man von diesem Durchschnittspunkte J an Kreis C zieht, das

Maass für die gemeinschaftliche Potenz der Kreise B und K für ihren innern Aehnlichkeitspunkt (259).

609. Wenn zwei Kreise sich schneiden, so schneidet sowohl der eine, als der andere ihrer Potenzkreise alle diejenigen Kreise rechtwinkelig, von denen die beiden Urkreise selbst rechtwinkelig geschnitten werden.

Beweis. Es seien B und K (Fig. 465.) die gegebenen sich schneidenden Kreise, so ist ihre gemeinschaftliche Sehne RN ihre Potenzlinie (A. 593, Z. 3). Man beschreibe von einem beliebigen, jedoch ausserhalb der Kreise liegenden Punkte C dieser Potenzlinie mit der an einen der Kreise gezogenen Tangente als Radius einen Kreis, so schneidet derselbe die gegebenen rechtwinkelig (A. 596); verbindet man die Durchschnittspunkte D, E, sowie D, G und verlängert die Verbindenden, bis sie die Axe BK schneiden, so ist der eine, A, dieser Durchschnittspunkte der äussere, der andere, J, der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise B und K (A. 602, Z. 2). Beschreibt man endlich von A und J als Mittelpunkten mit den an Kreis C gezogenen Tangenten AL, JF als Radien zwei Kreise, so ist der erstere, A, der äussere und der letztere, J, der innere Potenzkreis der Kreise B und K (A. 607); denn es ist:

$AL^2 = AD \,.\, AE$ (259) = der gemeinschaftlichen Potenz der Kreise B und K für ihren äussern Aehnlichkeitspunkt und

$JF^2 = JD \,.\, JG$ = der gemeinschaftlichen Potenz eben der Kreise für ihren innern Aehnlichkeitspunkt (A. 604, Anmk. 2).

Wie wir aus dem Beweise zu A. 597 wissen, ist die Axe BK die gemeinschaftliche Potenzlinie aller Kreise, wie Kreis C, welche die Kreise B und K rechtwinkelig schneiden, und da die Mittelpunkte A und J ihrer beiden Potenzkreise auf dieser Potenzlinie liegen, und die Halbmesser derselben gleich den an einen, C, der rechtwinkelig schneidenden Kreise gezogenen Tangenten sind, so schneiden die Potenzkreise den Kreis C sowohl, wie alle andern, die gegebenen Kreise rechtwinkelig schneidenden Kreise ebenfalls rechtwinkelig (A. 596); w. z. b. w.

Anmerkung 1. Da die Kreise B und K sich schneiden (V.), so können die sie rechtwinkelig schneidenden Kreise, wie Kreis C, ihrer Axe nicht begegnen, (A. 598 und A. 593, Z. 6); beide Aehnlichkeitspunkte der Kreise B und K müssen daher nothwendig ausserhalb des Kreises C liegen, und desshalb ist nicht allein der Radius des äussern, sondern auch der Radius des innern Potenzkreises gleich der Tangente, die man von dem betreffenden Aehnlichkeitspunkte

an einen der Kreise zieht, welche die Kreise B und K rechtwinkelig schneiden. Man vergleiche hiermit, was über diesen Gegenstand in A. 607, Z. 1 und 2 und A. 608, Anmk. gesagt worden ist.

Zusatz. Wenn sich zwei Kreise schneiden, so schneiden sich auch ihre Potenzkreise, und zwar in denselben Punkten, wie jene.

Beweis. Beschreibt man einen zweiten Kreis M, welcher die Kreise B und K rechtwinkelig schneidet, so liegen die Kreise C und M ganz ausser einander (A. 598); da nun Kreis C sowohl, als auch Kreis M nicht nur von den Kreisen B und K, sondern auch von ihren Potenzkreisen A und J rechtwinkelig geschnitten werden (A. 609), so müssen sich die vier zuletzt genannten Kreise in denselben Punkten, R, N, der Axe der Kreise C und M schneiden (A. 599), haben also diese Axe zur gemeinschaftlichen Potenzlinie (A. 593, Z. 3).

Anmerkung 2. Wenn die Kreise B und K sich berühren, so berühren sich auch, und zwar in demselben Punkte wie sie, alle die Kreise, von denen sie rechtwinkelig geschnitten werden (A. 598, Anmk.). Geschieht nun die Berührung von innen, so ist der Berührungspunkt der äussere, geschieht sie von aussen, der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise (A. 576, Z. 3); im erstern Falle fallen demnach die Punkte A und E, im letztern die Punkte G und J zusammen; es wird also das eine Mal die gemeinschaftliche Potenz für den äussern Aehnlichkeitspunkt und mithin der äussere Potenzkreis, das andere Mal die gemeinschaftliche Potenz für den innern Aehnlichkeitspunkt und mithin der innere Potenzkreis gleich Null; in beiden Fällen hat man daher für die gegebenen Kreise nur einen Potenzkreis, der die Kreise, welche jene rechtwinkelig schneiden, gleichfalls rechtwinkelig schneidet (A. 596); da, wie bereits erwähnt, diese Kreise sich im Berührungspunkte der Urkreise berühren, ihre gemeinschaftliche Tangente, die Axe der Urkreise, also ihre Potenzlinie (A. 593, Z. 2), diese Tangente aber der Halbmesser des Potenzkreises ist, dessen Mittelpunkt auf der Potenzlinie liegt.

610. Erklärung. Liegen zwei Punkte auf derselben Seite des äussern Aehnlichkeitspunktes zweier Kreise und in solchen Entfernungen von ihm, dass das Rechteck aus denselben gleich der zu diesem Aehnlichkeitspunkte gehörigen gemeinschaftlichen Potenz der Kreise ist, so sollen diese Punkte potenzhaltende in Bezug auf den äussern Aehnlichkeitspunkt genannt werden. Auf gleiche Weise sollen zwei Punkte potenzhaltende in Beziehung auf den innern Aehnlichkeitspunkt heissen, wenn sie auf verschiedenen Seiten dieses Aehnlichkeitspunktes und in solchen Entfernungen von ihm liegen, dass das Rechteck aus denselben gleich

ist der zu dem Aehnlichkeitspunkte gehörigen gemeinschaftlichen Potenz der Kreise.

Ein Kreis soll potenzhaltend in Beziehung auf den äussern oder innern Aehnlichkeitspunkt zweier andern Kreise genannt werden, jenachdem die äussere oder innere Potenz für ihn gleich der gemeinschaftlichen Potenz beider Kreise für eben diesen Aehnlichkeitspunkt ist.

Zusatz 1. Jeder Kreis ist daher potenzhaltend in Beziehung auf den Aehnlichkeitspunkt zweier andern, wenn er durch zwei potenzhaltende Punkte geht.

Beweis folgt unmittelbar aus 259.

Zusatz 2. Jeder Kreis, welcher in Beziehung auf den äussern Aehnlichkeitspunkt zweier andern, die ganz ausser einander liegen, potenzhaltend ist, schneidet den äussern Potenzkreis der letztern rechtwinkelig. Jeder Kreis dagegen, welcher in Beziehung auf den innern Aehnlichkeitspunkt zwei solcher Kreise potenzhaltend ist, schneidet ihren innern Potenzkreis in den Endpunkten eines Durchmessers.

Beweis. 1. Da die äussere Potenz für den potenzhaltenden Kreis gleich der gemeinschaftlichen Potenz für den äussern Aehnlichkeitspunkt der Urkreise ist (A. 610), so ist das Maass für jene äussere Potenz die Tangente, die man vom äussern Aehnlichkeitspunkte an den potenzhaltenden Kreis zieht (259); da ferner die gemeinschaftliche Potenz der Urkreise für ihren äussern Aehnlichkeitspunkt gleich dem Quadrate des Halbmessers ihres äussern Potenzkreises ist (A. 607), so ist dieses Quadrat auch gleich der äussern Potenz für den potenzhaltenden Kreis, also der Halbmesser des Potenzkreises das Maass für die genannte äussere Potenz; mithin ist die Tangente, die man vom äussern Aehnlichkeitspunkte der Urkreise an den potenzhaltenden Kreis zieht, gleich dem Halbmesser des äussern Potenzkreises derselben; zieht man daher im potenzhaltenden Kreise einen Halbmesser nach dem Berührungspunkte der Tangente, so steht derselbe senkrecht auf ihr (243), also senkrecht auf dem Halbmesser des äussern Potenzkreises, und zwar in dessen Endpunkte; folglich ist der erstere Radius auch eine Tangente des Potenzkreises (242); mithin schneiden sich der potenzhaltende und der äussere Potenzkreis rechtwinkelig (A. 595).

2. Die innere Potenz für den potenzhaltenden Kreis ist gleich der gemeinschaftlichen Potenz der Urkreise für ihren innern

Aehnlichkeitspunkt (A. 610), also das Maass für jene innere Potenz die halbe Mittelsehne, die man vom innern Aehnlichkeitspunkte im potenzhaltenden Kreise zieht (251 und 252); es ist ferner die gemeinschaftliche Potenz der Urkreise für ihren innern Aehnlichkeitspunkt gleich dem Quadrat des Halbmessers ihres innern Potenzkreises (A. 607); folglich ist dieser Halbmesser gleich der genannten halben Mittelsehne des potenzhaltenden Kreises; der letztere Kreis schneidet demnach den innern Potenzkreis in den Endpunkten eines Durchmessers; w. z. b. w.

611. Jeder Kreis, welcher zwei andere, ganz aussereinander liegende, gleichartig berührt, ist für deren äussern Aehnlichkeitspunkt potenzhaltend; für den innern Aehnlichkeitspunkt dagegen ist er potenzhaltend, wenn er die genannten Kreise ungleichartig berührt.

Beweis. Die Punkte, in welchen die beiden ganz aussereinander liegenden Kreise vom dritten gleichartig berührt werden, liegen mit dem äussern Aehnlichkeitspunkte der erstern in gerader Linie (A. 578); das Rechteck aus den Entfernungen der Berührungspunkte vom Aehnlichkeitspunkte ist also gleich der äussern Potenz für den Berührungskreis (A. 589).

Da sich nun die drei Potenzlinien, von denen zwei die gemeinschaftlichen Tangenten von je zweien der drei Kreise sind (A. 593, Z. 2), in einem Punke schneiden (A. 594), dieser Durchschnittspunkt also für alle drei Kreise ein Punkt gleicher Potenzen ist (A. 592), und folglich die Tangenten, die man von ihm aus an die Kreise zieht, also die beiden gemeinschaftlichen Tangenten, von gleicher Länge sind (A. 589, Z. 1), so muss ein Kreis, den man aus jenem Durchschnittspunkte mit der genannten Tangentenlänge, als Radius, beschreibt, unsere drei Kreise in den Berührungspunkten rechtwinkelig schneiden (A. 596); die äussere Potenz für den Berührungskreis ist demnach auch äussere Potenz für jenen, folglich gleich der gemeinschaftlichen Potenz der beiden ganz auseinanderliegenden Kreise für ihren äussern Aehnlichkeitspunkt (A. 604), und mithin der Berührungskreis potenzhaltend für diesen äussern Aehnlichkeitspunkt (A. 610).

Der zweite Fall, wenn die Berührung ungleichartig ist, wird dem ersten durchaus analog bewiesen, indem man nur anstatt A. 578 A. 579 anwendet.

Anmerkung. Unser Satz gilt auch noch, wenn der eine von den beiden Kreisen innerhalb des andern liegt. Der Beweis ist dem obigen ganz ähnlich; es tritt nur der Unterschied darin ein, dass bei gleichartiger Berührung die innere Potenz für den Berührungskreis gleich ist der gemeinschaftlichen Potenz der beiden andern Kreise für ihren äussern Aehnlichkeitspunkt, und bei ungleichartiger Berührung ist die äussere Potenz für den Berührungskreis gleich der gemeinschaftlichen Potenz der beiden andern Kreise für ihren innern Aehnlichkeitspunkt.

Zusatz 1. Hat man daher eine beliebige Menge von Kreisen, von denen jeder zwei gegebene Kreise gleichartig berührt, so ist der äussere Aehnlichkeitspunkt dieser beiden letzteren ein Punkt gleicher Potenzen für die ersteren.

Beweis. Jeder Berührungskreis ist potenzhaltend für den äussern Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise (A. 611), mithin ist die gemeinschaftliche Potenz derselben für ihren äussern Aehnlichkeitspunkt gleich der äussern Potenz jedes Berührungskreises für eben diesen Punkt (A. 610), daher sind die äussern Potenzen der Berührungskreise für den genannten Punkt alle untereinander gleich; der äussere Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise ist also ein Punkt gleicher Potenzen für die Berührungkreise; w. z. b. w.

Zusatz 2. Für ungleichartige Berührungen gilt etwas Aehnliches vom innern Aehnlichkeitspunkte.

Beweis ist dem des ersten Zusatzes ähnlich.

Zusatz 3. Berührt jeder von zwei beliebigen Kreisen zwei andere gleichartig, so geht die Potenzlinie der erstern durch den äussern Aehnlichkeitspunkt der letztern.

Beweis folgt unmittelbar aus Zusatz 1, verbunden mit A. 592 und A. 593, Z. 1.

Zusatz 4. Bei ungleichartigen Berührungen geht unter diesen Umständen die Potenzlinie der berührenden Kreise durch den innern Aehnlichkeitspunkt der berührten.

Beweis folgt unmittelbar aus Zusatz 2, verbunden mit A. 592 und A. 593, Z. 1.

Zusatz 5. Wenn von einer beliebigen Anzahl von Kreisen jeder zwei andere gleichartig berührt, so liegen die sämmtlichen äussern Aehnlichkeitspunkte je zweier in gerader Linie.

Beweis. Nimmt man zunächst zwei Kreise an, von denen jeder die gegebenen zugleich von aussen oder von innen berührt, so ist jeder der letzteren potenzhaltend in Beziehung auf den äussern Aehnlichkeitspunkt der beiden andern (A. 578, 604 und 611),

folglich ist die gemeinschaftliche Potenz dieser für ihren äussern Aehnlichkeitspunkt gleich der äussern Potenz eines jeden der gegebenen Kreise für eben diesen Punkt (A. 610), derselbe ist also ein Punkt gleicher Potenzen für die gegebenen Kreise und liegt mithin auf ihrer Potenzlinie (A. 592). Beschreibt man nun einen dritten Kreis, welcher die gegebenen wie die beiden ersten berührt, so wird auf ähnliche Weise gezeigt, dass der Aehnlichkeitspunkt je zweier auf der genannten Potenzlinie liegt u. s. w.; es liegen also die sämmtlichen äussern Aehnlichkeitspunkte je zweier Berührungskreise auf der Potenzlinie der gegebenen und mithin in gerader Linie; w. z. b. w.

Zusatz 6. Etwas Aehnliches gilt bei ungleichartigen Berührungen für die innern Aehnlichkeitspunkte.

Beweis ist dem des fünften Zusatzes ähnlich.

612. Erklärung. Aehnlichkeitspolaren zweier Kreise sollen die beiden Geraden heissen, welche als Polaren zu den Aehnlichkeitspunken dieser Kreise gehören; wie die Aehnlichkeitspunkte selbst, zu denen sie gehören, wollen wir sie durch die Beinamen äussere und innere unterscheiden.

Aehnlichkeitsaxe zweier Kreise dagegen heisst jede Gerade, welche die beiden Punkte, in denen diese Kreise von einem beliebigen dritten berührt werden, mit einem ihrer Aehnlichkeitspunkte verbindet (A. 578 und 579); sie zerfallen, wie die Aehnlichkeitspolaren, in äussere und innere.

Zusatz 1. Hat man daher drei beliebige Kreise und sucht ihre sechs Aehnlichkeitspunkte, so erhält man jeden der vier Pole, die für jeden Kreis zu den vier Geraden gehören, auf welchen je drei jener Aehnlichkeitspunkte liegen (A. 577), als Durchschnittspunkte zweier Aehnlichkeitspolaren.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 612, verbunden mit A. 564.

Zusatz 2. Berührt ein Kreis zwei andere, so fällt der zur Aehnlichkeitsaxe gehörige Pol des erstern mit dem Durchschnittspunkte der beiden gemeinschaftlichen Tangenten zusammen — ist also ein Punkt auf der Potenzlinie der beiden berührten Kreise.

Beweis. a. Es seien B und K (Fig. 466.) die gegebenen, vom Kreise C in G und H gleichartig berührten Kreise, so ist HGA ihre äussere Aehnlichkeitsaxe (A. 612). Zieht man die gemeinschaftlichen Tangenten HE, GE und verbindet deren Durchschnittspunkt E mit dem Mittelpunkte C des Berührungskreises, so ist

$\angle HCE = \angle GCE$ (250)
$\angle CHG = \angle CGH$ (51),
mithin $\angle HOC = \angle GOC$ (38, Z. 2) $= R$ (20)
$\angle CGE = R$ (243),
folglich $CE : CG = CG : CO$ (299, Z. 2);
daher ist der Durchschnittspunkt E der gemeinschaftlichen Tangenten der Pol zur Aehnlichkeitsaxe HGA als Polare für Kreis C (A. 562), und da HE die Potenzlinie der Kreise C und K, GE diejenige der Kreise B und C (A. 593, Z. 2), durch den Durchschnittspunkt dieser beiden Potenzlinien aber auch die dritte der Kreise B und K gehen muss (A 594), so ist der genannte Punkt ein Punkt auf der Potenzlinie der berührten Kreise.

b. Berührt Kreis C (Fig. 467.) die Kreise B und K in G und H ungleichartig, so zeigt man auf ganz ähnliche Weise wie in a, dass der zur innern Aehnlichkeitsaxe GHJ gehörige Pol E des Berührungskreises mit dem Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten GE, HE zusammmenfällt und mithin auf der Potenzlinie der berührten Kreise liegt; w. z. b. w.

Anmerkung. Unser Satz bleibt auch noch für den Fall, wo die Mittelpunkte aller drei Kreise in einer geraden Linie liegen, insofern richtig, als die Aehnlichkeitsaxe der berührten Kreise mit der gemeinschaftlichen Axe aller drei zusammenfällt, also ein Durchmesser des Berührungskreises wird und, da nun der Mittelpunkt dieses letztern auf der Potenzlinie der erstern liegt, diese ebenfalls ein Durchmesser des Berührungskreises ist, welcher auf dem erstgenannten Durchmesser senkrecht steht (A. 593), die Aehnlichkeitsaxe also, als Durchmesser, die Polare eines Punktes für den Berührungskreis ist, dessen Entfernung von dem Mittelpunkte $= \infty$ (A. 562, Anmk. 4), und der auf der Potenzlinie der berührten Kreise liegt, diese Potenzlinie aber mit den beiden andern Potenzlinien parallel lauft (26, Z. 1), weil alle drei zur gemeinschaftlichen Axe senkrecht stehen.

613. Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig berührt, so geht jede ihrer beiden äussern Aehnlichkeitspolaren durch den Pol, der für eben diesen Kreis zur Aehnlichkeitsaxe gehört.

Beweis. Es seien B und K (Fig. 466.) die vom Kreise C in G und H gleichartig berührten Kreise. Ausser der in A. 612, Z. 2 angegebenen Construction ziehe man noch die beiden äussern Aehnlichkeitspolaren NQ und RS und verlängere sie, bis NQ die gemeinschaftliche Tangente der Kreise B und C in Q, RS diejenige der Kreise K und C in S schneidet, so ist für Kreis B:

NQ die Polare für den Punkt A als Pol (Constr.),
EQ die Polare für den Punkt G als Pol (A. 562, Z. 4),
folglich AG die Polare für den Punkt Q als Pol (A. 564).
Es ist aber AG die äussere Aehnlichkeitsaxe der Kreise B und K (A. 612), mithin geht die äussere Aehnlichkeitspolare des Kreises B durch den Punkt Q, welcher für eben diesen Kreis als Pol zur Aehnlichkeitsaxe gehört. Auf ähnliche Weise zeigt man, dass auch die äussere Aehnlichkeitspolare des Kreises K durch den Punkt S geht, welcher für eben diesen Kreis als Pol zur Aehnlichkeitsaxe gehört; w. z. b. w.

Zusatz. Jeder Berührungspunkt liegt mit den beiden Polen, die in dem einen und andern der sich berührenden Kreise zur Aehnlichkeitsaxe gehören, in gerader Linie.

Beweis. Der Durchschnitt E der beiden gemeinschaftlichen Tangenten ist der Pol, zur Aehnlichkeitsaxe gehörig, für Kreis C (A. 612, Z. 2), er liegt also auf der Tangente EQ; der Punkt Q dieser Tangente ist der zur Aehnlichkeitsaxe gehörige Pol für Kreis B (A. 613); die beiden in Rede stehenden Pole liegen also mit dem Berührungspunkte G in gerader Linie. Dasselbe gilt für den Berührungspunkt H und die beiden für die Kreise C und K zur Aehnlichkeitsaxe beziehungsweise gehörigen Pole E und S; w. z. b. w.

613b. Werden zwei Kreise von einem dritten ungleichartig berührt, so geht jede ihrer beiden innern Aehnlichkeitspolaren durch den Pol, der für eben diesen Kreis zur Aehnlichkeitsaxe gehört.

Beweis. Es seien B und K (Fig. 467.) die vom Kreise C in G und H ungleichartig berührten Kreise, so ist GJH ihre innere Aehnlichkeitsaxe (A. 612); man ziehe die gemeinschaftlichen Tangenten GE, HE, die man bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert; ziehe alsdann die innern Aehnlichkeitspolaren ND, RF und verlängere sie, bis ND die Tangente GE in Q, RF die Tangente EH in S schneidet, so ist, analog dem Beweise zu A. 613:
Q der Pol der Aehnlichkeitsaxe GH für Kreis B,
S der Pol der Aehnlichkeitsaxe GH für Kreis K;
es geht also jede der beiden innern Aehnlichkeitspolaren durch den Pol, der für den betreffenden Kreis zur Aehnlichkeitsaxe gehört; w. z. b. w.

Zusatz. Jeder Berührungspunkt liegt mit den beiden Polen, die in dem einen und andern der sich berührenden Kreise zur Aehnlichkeitsaxe gehören, in gerader Linie (Fig. 467.).

Beweis analog dem Beweise zu A. 613, Z.

614. Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig berührt, und man verbindet die Berührungspunkte mit zwei solchen Endpunkten ihrer äussern Aehnlichkeitspolaren, die auf derselben Seite der Axe liegen, so schneiden sich diese beiden Geraden stets in einem Pnnkte, der auf der Peripherie des dritten Kreises liegt (Fig. 466.).

Beweis. 1. Ausser der in A. 612, Z. 2 und A. 613 angegebenen Construction ziehe man noch die gemeinschaftliche Tangente RN und verlängere sie, bis sie den äussern Aehnlichkeitspunkt A der Kreise B und K trifft (A. 576, Z. 1), so müssen die Berührungspunkte N und R mit den Punkten zusammenfallen, in welchen die äussern Aehnlichkeitspolaren die Kreise schneiden (209, Z. 2 und 562). Ferner ziehe man NG und verlängere sie bis znm zweiten Dnrchschnitt X mit der Peripherie des Kreises C, ziehe endlich noch HR nnd HX, so hat man offenbar nur zu beweisen, dass diese beiden Linien eine einzige Gerade ausmachen.

Da der Halbirungspunkt der gemeinschaftlichen Tangente NR ein Punkt gleicher Potenzen für die Kreise B und K ist (A. 589, Z. 2), also auf deren Potenzlinie liegt (A. 592), so muss ein Kreis, dessen Durchmesser NR und dessen Mittelpunkt jener Halbirnngspunkt ist, die genannten Kreise in N und R rechtwinkelig schneiden (A. 596), und seine äussere Potenz AR . AN für den äussern Aehnlichkeitspunkt A (A. 589) ist gleich der gemeinschaftlichen Potenz der Kreise B nnd K für eben diesen Aehnlichkeitspunkt (A. 604); diese gemeinschaftliche Potenz ist aber auch gleich der äussern Potenz AH . AG des Kreises C für denselben Punkt (A. 610), da Kreis C für ihn potenzhaltend ist (V. und A. 611); mithin ist also

$$AR . AN = AH . AG,$$

daher $AR : AH = AG : AN$ (202, Z. 5),

folglich $\triangle AHR \sim \triangle ANG$ (198),

also $\angle RHA = \angle GNA$

$= \angle NGQ$ (247)

$\angle GHX = \angle XGQ$ (247),

mithin $\angle RHA + \angle GHX = \angle NGQ + \angle XGQ = 2R$ (20),

folglich HR und HX eine einzige Gerade (21).

2. Zieht man ferner DG und verlängert sie, bis sie die Peripherie des Kreises C in Y zum zweiten Male schneidet, zieht alsdann HY und HF, so hat man wiederum nur zu beweisen, dass diese beiden Linien eine einzige Gerade ausmachen. Aus dem Beweise zu 1 hatten wir:

$\angle RHA = \angle GNA$,

oder $\angle RHY + \angle YHG = \angle GND + \angle DNA$,

aber $\angle YHG = \angle YGE$ (247),

$= \angle DGQ$ (22)

$= \angle GND$ (247),

mithin $\angle RHY = \angle DNA$.

Da nun DN und FR $\perp$ AK (A. 562, Anm.), daher DN $\parallel$ FR ist (26, Z. 1), so ist $\angle DNA = \angle FRA$ (24)

$= \angle FRH + \angle HRA$

$= \angle FRH + \angle RFH$ (247),

und folglich auch $\angle RHY = \angle FRH + \angle RFH$

und $\angle RHY + \angle RHF = \angle FRH + \angle RFH + \angle RHF = 2R$ (38),

mithin HY und HF eine einzige Gerade (21); w. z. b. w.

614b. Werden zwei Kreise von einem dritten ungleichartig berührt, und man verbindet die Berührungspunkte mit zwei solchen Endpunkten ihrer innern Aehnlichkeitspolaren, die auf verschiedenen Seiten der Axe liegen, so schneiden sich diese beiden Geraden stets in einem Punkte, der auf der Peripherie des dritten Kreises liegt (Fig. 467.).

Beweis. Ausser der in 613b angegebenen Construction ziehe man die gemeinschaftliche Tangente NR, welche durch den innern Aehnlichkeitspunkt J gehen muss (A. 576, Z. 2), und die Berührungspunkte N, R sind diejenigen, in welchen die Peripherieen der Kreise von ihren innern Aehnlichkeitspolaren geschnitten werden (209, Z. 2 und A. 562, Anmk.). Zieht man nun GN und GD und verlängert beide, bis sie die Peripherie des Kreises C zum zweiten Male in X und Y schneiden, zieht alsdann HX, HR, so wie HY, HF, so hat man offenbar nur zu beweisen, dass HX und HR eine einzige Gerade ausmachen, und ebenso HY und HF eine einzige Gerade sind; dieser Beweis aber wird auf ganz ähnliche Weise geführt, wie der Beweis zu A. 614; w. z. b. w.

615. Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig berührt, so wird die Peripherie dieses letzteren durch die Potenzlinie der beiden erstern in zwei Bogen getheilt, die denen beziehungsweise ähnlich sind, in die jeder der erstern Kreise durch seine äussere Aehnlichkeitspolare getheilt wird (Fig. 466.).

Beweis. Ausser der in A. 614 angegebenen Construction ziehe man noch XY und die Radien BN und CX, so wissen wir aus dem Beweise zu A. 614, dass

$\triangle AHR \sim \triangle ANG$,

also $\angle HRA$ oder $\angle XRN = \angle AGN$

$= \angle HGX$ (22),

folglich $\triangle XRN \sim \triangle XGH$ (196),

also $RX : NX = GX : HX$,

mithin $RX . HX = NX . GX$ (203, Z. 3).

Es ist also X ein Punkt gleicher Potenzen für die Kreise B und K (A. 589).

Ebenso ist Y ein solcher Punkt (zöge man nämlich die gemeinschaftliche Tangente ADF, so erhielte man $\triangle AGD \sim \triangle AFH$ und hieraus $\triangle YFD \sim \triangle YGH$, und daher $DY . GY = FY . HY$); daher ist XY die Potenzlinie der genannten Kreise (A. 592); da diese senkrecht zur Axe steht (A. 593), gleich wie die Aehnlichkeitspolare DN, so ist $XY \parallel DN$ (26, Z, 1).

Hieraus ergibt sich (25) $\triangle YGX \sim \triangle DGN$ (196),

also $GX : GN = XY : DN$,

aber auch $GX : GN = CX : BN$ [weil $\triangle BNG \sim \triangle CXG$

folglich $XY : DN = CX : BN$, [(196 und 51)],

d. h. es verhalten sich die Sehnen XY und DN der Kreise C und B wie ihre Halbmesser oder wie ihre Durchmesser, daher sind die Kreisabschnitte jener Sehnen und mithin die zugehörigen Bogen ähnlich (316, Z. 3), also

1) arc. $YGX \sim$ arc. DGLN und

arc. $YHX \sim$ arc. DPN.

Auf ganz ähnliche Weise zeigt man, dass auch

2) arc. $YGX \sim$ arc. RMF und

arc. $YHX \sim$ arc. RHF.

Aus 1 und 2 hat man daher

arc. $YGX \sim$ arc. DGLN $\sim$ arc. RMF und

arc. $YHX \sim$ arc. DPN $\sim$ arc. RHF; w. z. b. w.

Anmerkung. Man könnte unsern Satz auch so aussprechen: Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig berührt, so liegt jeder Berührungspunkt mit einem Endpunkte einer aussern Aehnlichkeitspolare und einem der Durchschnittspunkte der Potenzlinie unserer beiden in Rede stehenden Kreise mit der Peripherie des dritten in gerader Linie.

615b. Werden zwei Kreise von einem dritten ungleichartig berührt, so wird die Peripherie dieses letztern durch die Potenzlinie der beiden erstern in zwei Bogen getheilt, die denen beziehungsweise ähnlich sind, in die jeder der erstern Kreise durch seine innere Aehnlichkeitspolare getheilt wird (Fig. 467.).

Beweis. Ausser der in A. 614[b] angegebenen Construction ziehe man noch XY und die Radien CX, BN; der fernere Beweis ist dem in A. 615 ganz entsprechend.

Anmerkung. Man kann diesen Satz auch so aussprechen: Werden zwei Kreise von einem dritten ungleichartig berührt, so liegt jeder Berührungspunkt mit einem Endpunkte einer innern Aehnlichkeitspolare und einem der Durchschnittspunkte der Potenzlinie unserer beiden in Rede stehenden Kreise mit der Peripherie des dritten in gerader Linie.

616. Werden drei Kreise von einem vierten gleichartig berührt, so liegt der Durchschnittspunkt ihrer Potenzlinien (A. 594) mit jedem Berührungspunkte und dem Durchschnittspunkte der beiden äussern Aehnlichkeitspolaren des Kreises, dem dieser Berührungspunkt zugehört, in gerader Linie.

Beweis. Sind B, K und J (Fig. 466.) die drei vom Kreise C gleichartig berührten Kreise; ist ferner W der Durchschnittspunkt ihrer drei Potenzlinien und V der Durchschnittspunkt der beiden äussern Aehnlichkeitspolaren RF und TU des Kreises K, so sollen diese beiden Durchschnittspunkte mit dem Berührungspunkte H der Kreise C und K in gerader Linie liegen. Ausser der in den vorhergehenden Sätzen angegebenen Construction ziehe man TH und verlängere sie, bis sie die Peripherie des Kreises C zum zweiten Male in Z schneidet, so ist Z ein Punkt auf der Potenzlinie der Kreise K und J (A. 615, Anmk.), also WZ ihre Potenzlinie; man ziehe YZ und TF, so ist: $RF \perp KA$ (A. 562, Anmk.)

$XY \perp KA$ (A. 593)

folglich: $RF \parallel XY$ (26, Z. 1). Aus ähnlichen Gründen ist: $TU \parallel WZ$,

mithin: $\angle FVT = \angle YWZ$ (A. 4)

$\angle VFT = \angle RFT$

$= \angle RHT$ (244, Z. 1)

$= \angle ZHX$ (22)

$= \angle ZYW$ (244, Z. 1)

folglich: $\triangle VFT \sim \triangle WYZ$ (196)

also 1) $TF : YZ = VT : WZ$.

Ferner ist FHY eine gerade Linie (A. 615, Anmk.), und da SE die gemeinschaftliche Tangente der Kreise K und C ist (Constr.), so ist: $\angle FTH = \angle FHS$ (247)

$= \angle EHY$ (22)

$= \angle HZY$ (247)

$\angle FHT = \angle YHZ$ (22)

folglich $\triangle FHT \sim \triangle YHZ$ (196)

daher TF : YZ = TH : ZH. Aus 1 hat man nun:

VT : WZ = TH : ZH.

Mithin liegen die Punkte V, H, W in gerader Linie (A. 309).

Auf ähnliche Weise zeigt man, dass der Durchschnittspunkt W der drei Potenzlinien mit jedem der beiden andern Berührungspunkte und dem Durchschnittspunkte der beiden äussern Aehnlichkeitspolaren des betreffenden Kreises in gerader Linie liegt; w. z. b. w.

616b. Werden drei Kreise von einem vierten ungleichartig berührt, also zwei von aussen und der dritte von innen, oder umgekehrt, so liegt der Durchschnittspunkt ihrer Potenzlinien mit dem Berührungspunkte und dem Durchschnittspunkte der beiden innern Aehnlichkeitspolaren des dritten Kreises, dagegen mit dem Berührungspunkte und dem Durchschnittspunkte einer innern und einer äussern Aehnlichkeitspolare eines jeden der beiden andern Kreise in gerader Linie.

Beweis. Werden die Kreise K und A (Fig. 467.) vom Kreise C von aussen, Kreis B von innen berührt: ist ferner W der Durchschnittspunkt der drei Potenzlinien, Z der Durchschnittspunkt der beiden innern Aehnlichkeitspolaren des Kreises B, so sollen

a) die Punkte W und Z mit dem Berührungspunkte G in gerader Linie liegen.

Ausser der in den vorhergehenden Sätzen angegebenen Construction ziehe man GL und verlängere sie, bis sie die Peripherie des Kreises C zum zweiten Male in M schneidet, so ist M ein Punkt gleicher Potenzen für die Kreise A und B (A. 615b, Anmk.), also WM ihre Potenzlinie; zieht man nun noch MY und DL, so hat man aus ähnlichen Gründen, wie die im Beweise zu A. 617 angeführten:

$\triangle WYM \sim \triangle PDL$

und $\triangle GYM \sim \triangle GDL$

und hieraus: WY : PD = MY : DL

= GY : GD,

folglich: WPG eine gerade Linie (A. 309).

b) Ist V der Durchschnittspunkt der äussern Aehnlichkeitspolare VU und der innern VF des Kreises K, so ziehe man UH und verlängere sie, bis sie die Peripherie des Kreises C zum zweiten Male in O schneidet, so ist O ein Punkt gleicher Potenzen für

die Kreise K und A (A. 615, Anmk.), also WO ihre Potenzlinie; zieht man nun OY und UF, so hat man wieder aus ähnlichen Gründen, wie in a: $\triangle VFU \sim \triangle WYO$

und $\triangle HFU \sim \triangle HYO$

und hieraus: $VU : WO = FU : YO$

$= HU : HO$

mithin WHV eine gerade Linie (A. 309).

Aehnliches gilt in Betreff des Kreises A; w. z. b. w.

617. In jedem Viereck (ABCD Fig. 468.), welches um einen Kreis beschrieben ist, liegen die Halbirungspunkte seiner Diagonalen (G, H) mit dem Mittelpunkte (M) des Kreises in gerader Linie.

Beweis. Halbirt man eine der Diagonalen, AC, in G, verbindet den Halbirungspunkt mit dem Mittelpunkte des Kreises und verlängert diese Verbindende GM, bis sie die andere Diagonale in H schneidet, so hat man offenbar nur zu beweisen, dass BH = DH ist.

Man ziehe vom Mittelpunkte gerade Linien sowohl nach den Ecken des Vierecks, als auch nach den Punkten, in welchen die Seiten desselben den Kreis berühren, ferner BG und DG, so ist:

$\angle MED = R = \angle MFD$ (243)

$DE = DF$ (259, Z. 2)

mithin: $\triangle MED \cong \triangle MFD$ (46)

also auch: $\triangle MED = \triangle MFD$. Aus ähnlichen Gründen ist: $\triangle MEA = \triangle MLA$

$\triangle MKB = \triangle MLB$

$\triangle MKC = \triangle MFC$. Durch Addition erhält man:

1) $\triangle AMD + \triangle BMC = \triangle AMB + \triangle MCD = \frac{1}{2}ABCD$.

Ferner ist: $\left.\begin{array}{l}\triangle ABG = \triangle BGC \\ \triangle GCD = \triangle AGD\end{array}\right\}$ (84)

Durch Addition hat man daher:

$\triangle ABG + \triangle GCD = \triangle BGC + \triangle AGD = \frac{1}{2}ABCD$.

Wegen 1 hat man mithin:

$\triangle AMD + \triangle BMC = \triangle BGC + \triangle AGD$, also auch:

$\triangle AMD - \triangle AGD = \triangle BGC - \triangle BMC$;

zieht man hiervon ab:

$\triangle AGM = \triangle CGM$ (84)

so hat man: $\triangle GMD = \triangle BGM$.

aber: $\triangle GMD : \triangle BGM = DH : BH$ (A. 311),
folglich: $DH = BH$; w. z. b. w.

Anmerkung. Der vorstehende Satz gilt nicht blos für den Kreis, sondern auch für die übrigen Kegelschnitte. Schon der erste Entdecker desselben, Newton, kannte ihn in dieser Allgemeinheit. Einen von dem hier mitgetheilten ganz verschiedenen Beweis unseres speciellen Satzes für den Kreis gab der (für die Wissenschaft zu früh verstorbene) französische Mathematiker Durande s. Gergonne Ann. XIV, p. 309. In derselben schätzbaren Zeitschrift finden sich auch Beweise des allgemeineren Satzes; ein synthetischer von Poncelet in XII, p. 109, und ein analytischer von dem Herausgeber selbst in XI, p. 382.

618. Erklärung. Ein Vieleck, um welches sich ein Kreis beschreiben lässt, hat man in neuerer Zeit ein nach den Ecken centrisches Vieleck zu nennen angefangen; ein Vieleck dagegen, welches um einen Kreis beschrieben ist, heisst: centrisch nach den Seiten.

Der bequemen Kürze halber, welche diese Ausdrücke in vielen Fällen gestatten, werden wir uns ihrer bei den nächstfolgenden Sätzen, das Viereck betreffend, bedienen.

619. Ist ein Viereck nach den Ecken und Seiten zugleich centrisch, so gehen die beiden Geraden, welche die Punkte verbinden, in denen der eingeschriebene Kreis je zwei Gegenseiten berührt, durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen (A. 580, Z. 7) und halbiren die von den letztern gebildeten Winkel, stehen also aufeinander senkrecht.

Beweis. Verbindet man in dem nach den Ecken und Seiten centrischen Viereck ABCD (Fig. 469.) die Punkte unter einander, in denen der eingeschriebene Kreis die Seiten berührt, so erhält man das Viereck LEFK dergestalt in Kreis M beschrieben, dass seine Ecken mit den Berührungspunkten der Seiten des um eben diesen Kreis beschriebenen Urvierecks zusammenfallen, daher schneiden sich die Diagonalen beider Vierecke in einem Punkte G (A. 580, Z. 7). Nun ist:

$$\angle LFC = \angle LEF \text{ (247)}$$
$$= \angle BLF \text{ (247)}$$
$$\angle ACD = \angle ABD \text{ (244, Z. 1)}$$

folglich: $\angle CGF = \angle BGL$ (38) $= \angle DGF$ (22) $= \frac{1}{2} \angle CGD$.
Ebenso: $\angle CGK = \angle BGK = \frac{1}{2} \angle BGC$, daher auch:
$\angle CGF + \angle CGK = \angle DGF + \angle BGK = R$ (20)
also: $LF \perp KE$; w. z. b. w.

620. Verbindet man in einem nach den Seiten centrischen Vierecke die Punkte, in welchen der eingeschriebene Kreis je zwei Gegenseiten berührt, so ist das Viereck auch nach den Ecken centrisch, wenn jene Verbindenden, welche durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen gehen (A. 580, Z. 7), die Winkel halbiren, unter denen sich die letztern schneiden.

Beweis. (Fig. 469.) Es ist:

$\angle CGF = \angle DGF$ (V.) $= \angle BGL$ (22)

$\angle CFG = \angle LEF$ (247) $= \angle BLG$ (247)

folglich: $\angle FCG = \angle GBL$ (38)

$\angle CGD = \angle BGA$ (22)

mithin $\triangle CGD \sim \triangle BGA$ (196)

daher: $CG : BG = DG : AG$

folglich: ABCD nach den Ecken centrisch (251, Z. 2); w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz ist eine Umkehrung des vorhergehenden.

621. Ist ein Viereck nach den Ecken und Seiten zugleich centrisch, so liegt der Durchschnittspunkt seiner Diagonalen mit den Mittelpunkten des innern und äussern Kreises in gerader Linie.

Beweis. Ist ABCD (Fig. 469.) nach den Ecken und Seiten zugleich centrisch, N der Mittelpunkt des äussern, M der des innern Kreises, so sind für Kreis N die Durchschnittspunkte der an je zwei Gegenecken des Vierecks gezogenen Tangenten beziehungsweise die Pole für die jene Ecken verbindenden Diagonalen als Polaren (A. 567), mithin der Durchschnittspunkt G dieser Polaren der Pol für die Gerade, welche die beiden erstern Durchschnittspunkte verbindet (A. 564); eine Gerade, durch den Mittelpunkt N nach dem Punkte G gezogen, muss daher, hinreichend verlängert, die Polare des Punktes G unter rechten Winkeln schneiden (A. 562, Anmk.). Verbindet man ferner die Punkte untereinander, in welchen der innere Kreis die Seiten des Vierecks berührt, so gilt in Betreff des Durchschnittspunktes der Diagonalen des so entstandenen Vierecks EFKL, welcher mit dem Durchschnittspunkte der Diagonalen des Urvierecks zusammenfällt (A. 580, Z. 7), als Pol Aehnliches für Kreis M, d. h die zugehörige Polare ist die Gerade, welche die Durchschnittspunkte der an je zwei Gegenecken gezogenen Tangenten, die aber keine andern, als die Seiten des Urvierecks sind, verbindet; eine Gerade also, durch den Mittelpunkt M nach dem Punkte G gezogen, muss bei hinreichen-

der Verlängerung die Polare des Punktes G unter rechten Winkeln schneiden (A. 562, Anmk.). Es bilden aber die Polaren des Punktes G für den äussern und innern Kreis eine einzige gerade Linie, weil die vier Durchschnittspunkte, von denen je zwei die Endpunkte jener Polaren sind, in gerader Linie liegen (A. 580, Z. 2), und da, wie gezeigt ist, beide Senkrechte, die man von den Mittelpunkten nach dieser Polare zieht, durch den Punkt G gehen, von einem Punkte nach einer Geraden aber nur eine Senkrechte möglich ist (29), so müssen die Mittelpunkte der Kreise mit dem Durchschnittspunkte der Diagonalen in gerader Linie liegen; w. z. b. w.

622. In jedem Vierecke, welches sowohl nach den Ecken als nach den Seiten centrisch ist, und in welchem sich die Diagonalen unter rechten Winkeln schneiden, halbirt der Mittelpunkt des innern Kreises die Gerade, welche die Halbirungspunkte der beiden Diagonalen verbindet.

Beweis. Ist ABCD (Fig. 469.) nach den Ecken und Seiten centrisch, N der Mittelpunkt des äussern, M der des innern Kreises, schneiden sich ferner die Diagonalen in G unter rechten Winkeln, so liegen die Halbirungspunkte O und P der beiden Diagonalen mit dem Mittelpunkte des innern Kreises in gerader Linie (A. 617); man ziehe diese Gerade OMP und vom Mittelpunkte des äussern Kreises die Geraden NO, NP nach den genannten Halbirungspunkten, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} NO \perp AC \\ NP \perp BD \end{array}\right\} (248)$$

folglich NOGP ein Rechteck (V., 26, Z., 55 und 58).

Nun liegen aber auch die Punkte N, M, G in gerader Linie, (A. 621), also der Punkt M sowohl auf PO, wie auf GN, er ist mithin der Durchschnittspunkt der Diagonalen,

mithin MO = MP (61); w. z. b. w.

Zusatz. Daher ist der Mittelpunkt des äussern Kreises vom Durchschnittspunkte der Diagonalen doppelt so weit entfernt, als der Mittelpunkt des innern Kreises von eben jenem Punkte, und ebensoweit, als die Halbirungspunkte der Diagonalen von einander.

Beweis. Da NOGP ein Rechteck (s. Beweis zum Hauptsatze), so ist: $MG = MN = \frac{1}{2}GN$ (61)

also 1) N doppelt so weit entfernt von G, als M.

Ferner ist: OP = NG (61, Z.)
also 2) N von G ebensoweit entfernt, wie O von P;
w. z. b. w.

623. In einem sowohl nach den Ecken als nach den Seiten centrischen Vierecke verhalten sich die Entfernungen des Durchschnittspunktes der Diagonalen von den Endpunkten einer der Seiten, wie die Segmente, in welche eben diese Seite durch den Berührungspunkt des innern Kreises getheilt wird; die Diagonalen selbst verhalten sich wie die Summen der von ihren beiderseitigen Endpunkten an den innern Kreis gezogenen Tangenten, d. h. wie die Summen der von den Endpunkten der Diagonalen auslaufenden Segmente der Seiten, in welche letztere durch den innern Kreis getheilt werden.

Beweis. Es sei ABCD (Fig. 469.) nach den Ecken und Seiten centrisch; man ziehe die Diagonalen und die beiden Geraden KE, LF, welche die Berührungspunkte des innern Kreises mit je zweien Gegenseiten verbinden, so gehen dieselben durch den Durchschnittspunkt G der Diagonalen (580, Z. 7), und es ist:

a. $\angle BGL = \angle AGL$ (A. 619)

folglich: $BG : AG = BL : AL$ (206).

Aus ähnlichen Gründen ist:

$BG : CG = BK : CK$

$DG : AG = DE : AE$

$DG : CG = DF : CF.$

b. Ferner hatten wir aus a:

$BG : AG = BL : AL$

$DG : AG = DE : AE$

$AL = AE$ (259, Z. 2),

folglich: $BG : DG = BL : DE$

daher: $BG + DG : BG = BL + DE : BL$ (153)

oder: $BD : BG = BL + DE : BL.$

Ebenso ist: $AC : AG = AE + CF : AE,$

und da wir aus a hatten:

$BG : AG = BL : AL$

$= BL : AE$ (259, Z. 2)

so ist auch: $BD : AC = BL + DE : AE + CF$

$= BK + DF : AL + CK$ (259, Z. 2);

w. z. b. w.

624. In einem sowohl nach den Ecken als nach den Seiten centrischen Vierecke ist das Rechteck aus zwei solchen, durch die Berührungspunkte des innern Kreises gebildeten Seitensegmenten, welche von den beiden Endpunkten einer Diagonale auslaufen, gleich dem Quadrate vom Halbmesser des innern Kreises.

Beweis. Es sei M (Fig. 469.) der Mittelpunkt des innern Kreises des nach den Ecken und Seiten centrischen Vierecks ABCD; man verbinde die Berührungspunkte je zweier Gegenseiten durch die Geraden EK und LF, so schneiden sich diese im Durchschnittspunkte G der Diagonalen (A. 580, Z. 7); man ziehe ferner die Halbmesser ML, ME, MF nach den Berührungspunkten und die Linien MB, MD, so ist:

	DE = DF (259, Z. 2)
	ME = MF (als Radien)
	$\angle$MED = $\angle$MFD = R (243)
folglich	$\triangle$MED $\cong$ $\triangle$MFD (45)
daher	$\angle$EDM = $\angle$FDM
mithin:	$\triangle$EHD $\cong$ $\triangle$FHD (45)
daher	$\angle$MHE = $\angle$MHF = R (20)
folglich	arc. EJ = arc. FJ (248)
mithin:	$\angle$EMD = $\angle$GKF (245, Z. 1 und 244)
	$\angle$MED = R (243)
	= $\angle$KGF (A. 619)
folglich	$\triangle$MED $\sim$ $\triangle$KGF (196).

Aus ähnlichen Gründen ist auch:

$\triangle$MBL $\sim$ $\triangle$KGF, daher hat man:

	ME : DE = GK : GF
und	BL : ML = GK : GF
folglich	ME : DE = BL : ML
	ME = ML, als Radien;

bezeichnet man daher den Radius des innern Kreises mit R, so ist:

DE . BL = R^2 (203, Z. 4).

Auf ähnliche Weise zeigt man, dass auch:

AE . CF = R^2; w. z. b. w.

Anmerkung. Diesen Satz machte zuerst bekannt Durande; s. Gergonne Ann. XV, p. 140.

625. Nimmt man in einem nach den Ecken und Seiten centrischen Vierecke von den durch den innern Kreis gebildeten

Seitensegmenten die Summe sowohl der beiden, welche von den Endpunkten der einen Diagonale auslaufen, als der, welche von den Endpunkten der andern ausgehen, und bildet aus ihnen ein Rechteck, so ist der Inhalt desselben um das Quadrat vom Durchmesser des eingeschriebenen Kreises kleiner, als das Rechteck aus den beidenn Diagonalen. (Fig. 469.)

Beweis. Mit Beibehalt der in A. 623 angegebenen Construction ist, wenn man den Durchmesser D, den Radius R nennt:

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC \ (276)$$

$$D^2 = 4R^2 (74, Z. 1) = 2DE.BL + 2AE.CF \ (A. 624), \text{ also}$$

$$\begin{aligned} AC.BD - D^2 &= AB.CD + AD.BC - 2DE.BL - 2AE.CF \\ &= AL.CD + BL.CD + AE.BC + DE.BC - \\ &\quad 2DE.BL - 2AE.CF \ (74) \\ &= AL.DF + AL.CF + BL.DF + BL.CF + AE.\\ &\quad BK + AE.CK + DE.BK + DE.CK - 2DE.\\ &\quad BL - 2AE.CF \ (72) \\ &= AL.DF + BL.CF + AE.BK + DE.CK \\ &= AL(DF + BK) + CK(DF + BK) \\ &= (AL + CK)(DF + BK); \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

626. Bleibt Alles wie beim vorigen Satze, so ist das Rechteck, welches aus Summen von Seitensegmenten auf die vorher näher bezeichnete Art gebildet wird, um das Quadrat vom Durchmesser des innern Kreises grösser als das vierfache Rechteck aus den beiden Segmenten, in welche die beide Halbirungspunkte der Diagonalen verbindende Gerade durch den Mittelpunkt des innern Kreises getheilt wird. (Fig. 469.)

Beweis. Ausser der in A. 624 angegebenen Construction ziehe man noch den Halbmesser MK und die Linien MA und MC, so ist, wenn man noch den Durchmesser des innern Kreises mit D, den Radius mit R bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} AB^2 &= AL^2 + BL^2 + 2AL.BL \\ BC^2 &= BK^2 + CK^2 + 2BK.CK \end{aligned}\right\} (74)$$

$$\begin{aligned} &= BL^2 + CK^2 + 2BL.CK \\ &\quad [\text{weil } BL = BK \ (259, Z. 2)] \\ CD^2 &= CF^2 + DF^2 + 2CF.DF \ (74) \\ &= CK^2 + DE^2 + 2CK.DE \\ &[\text{weil } CF = CK \text{ und } DF = DE \ (259, Z. 2)] \\ AD^2 &= AE^2 + DE^2 + 2AE.DE \ (74) \end{aligned}$$

$= AL^2 + DE^2 + 2AL \,.\, DE$
[weil $AE = AL$ (259, Z. 2)].

Durch Addition erhält man:

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2(AL^2+BL^2+CK^2+DE^2+AL \,.\, BL + BL \,.\, CK + CK \,.\, DE + AL \,.\, DE)$
$= 2[AL^2 + BL^2 + CK^2 + DE^2 + AL (BL + DE) + CK (BL + DE)]$ (72)
$= 2[AL^2+BL^2+CK^2+DE^2 + (AL + CK)(BL + DE)]$ (72). Folglich:

1) $\frac{1}{2}(AB^2+BC^2+CD^2+AD^2) = AL^2 + BL^2 + CK^2 + DE^2 + (AL + CK)(BL + DE)$. Ferner ist:

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4OP^2$ (A. 215)
$= 4(CO^2 + BP^2 + OP^2)$ (74, Z 1), also:

$\frac{1}{2}(AB^2+BC^2+CD^2+AD^2) = 2(CO^2 + BP^2 + OP^2)$
$= 2(CO^2 + BP^2 + MO^2 + MP^2 + 2MO \,.\, MP)$ (74)
$= AM^2 + CM^2 + BM^2 + DM^2 + 4MO \,.\, MP$ (93)
$= AL^2 + BL^2 + CK^2 + DE^2 + 4R^2 + 4MO \,.\, MP$ (87).

Wegen 1 ist mithin:

$(AL + CK)(BL + DE) = 4MO \,.\, MP + 4R^2$
$= 4MO \,.\, MP + D^2$; w. z. b. w.

Zusatz. Daher sind in einem nach den Ecken und Seiten centrischen Viereck das Rechteck aus den beiden Diagonalen und das Vierfache des Rechtecks aus den Linien zwischen deren Halbirungspunkten und dem Centrum des innern Kreises zusammen doppelt so gross, als das Rechteck aus den Tangentensummen, welche man aus den Endpunkten jeder Diagonale an den innern Kreis zieht.

Beweis. Es ist:

$AC \,.\, BD = (AL + CK)(BL + DE) + D^2$ (A. 625)
$4MO \,.\, MP = (AL + CK)(BL + DE) - D^2$ (A. 626)

folglich:

$AC \,.\, BD + 4MO \,.\, MP = 2(AL + CK)(BL + DE)$; w. z. b. w.

627. Verlängert man in einem nach den Ecken und Seiten centrischen Vierecke beide Paare der gegenüberliegenden Seiten bis zum Durchschnitt und beschreibt um jedes der vier so entstandenen Dreiecke einen Kreis, so ist der Unterschied

der Halbmesser zweier solcher Kreise, die um zwei zusammengehörige, d. h. eine gemeinschaftliche Spitze habende Dreiecke beschrieben sind, gleich dem Unterschiede der beiden andern.

Beweis. Es sei ABCD (Fig. 470.) nach den Ecken und Seiten centrisch; es sei N der Mittelpunkt des äussern und M der Mittelpunkt des innern Kreises; man ziehe in diesem die Radien nach den Berührungspunkten und verbinde die letzteren untereinander, so gehen die Geraden KE und LF durch den Durchschnittspunkt G der Diagonalen (A. 619), und die Mittelpunkte der beiden Kreise liegen mit dem Punkte G in gerader Linie (A. 621); man ziehe diese Gerade und verlängere sie, bis sie die Gerade HJ, welche die Durchschnittspunkte der beiden Paare der gegenüberliegenden Vierecksseiten verbindet, in S schneidet, so ist für Kreis M: H der Pol für die Polare LF, J der Pol für die Polare KE (A. 567)

folglich HJ die Polare für den Punkt G als Pol (A. 564)

mithin 1) NS ⊥ HJ und G und S conjugirte Pole (A. 562, Anmk.).

Zieht man nun SC, MC und verbindet den Punkt O, in welchem MC die Linie KF schneidet, mit dem Durchschnittspunkte der Diagonalen durch die Gerade GO, so sind für Kreis M:

C und O conjugirte Pole (A. 567)

daher GO antiparallel SC (A. 563)

also: $\angle GOM = \angle GSC$ (A. 37, Anmk.)

$\angle MOF = R$ (A. 562, Anmk.) $= \angle GSH$ (wegen 1)

folglich:

$\angle GOM + \angle MOF = \angle GSC + \angle GSH$

oder 2) $\angle GOF = \angle HSC$. Es ist aber:

$\angle KGF = R$ (A. 619)

und $KO = OF$ (248)

mithin: $GO = OF$ (A. 61)

daher $\angle OGF = \angle OFG$ (51) $= \angle BLK$ (247) $= \angle BKL$ (259, Z. 2 u. 51)

also $\angle OGF + \angle OFG = \angle BLK + \angle BKL$

folglich: $\angle LBK = \angle GOF$ (38)

$= \angle HSC$ (wegen 2)

$\angle LBK + \angle CBH = 2R$ (20), mithin auch:

$\angle HSC + \angle CBH = 2R$

daher 3) BHSC ein Kreisviereck (244, Z. 4).

Auf ähnliche Weise zeigt man, dass:

4) SCDJ ein Kreisviereck sei.

Zieht man ferner DS, so ist:

$\angle HBJ + \angle CBA = 2R$ (20)

$= \angle CBA + \angle CDA$ (275)

also $\angle HBJ = \angle CDA$

$\angle HJB = \angle SJC = \angle CDS$ (244, Z. 1)

folglich: $\angle HBJ + \angle HJB = \angle CDA + \angle CDS = \angle ADS$

$\angle HBJ + \angle HJB + \angle AHS = 2R$ (38)

daher auch: $\angle ADS + \angle AHS = 2R$

mithin 5) AHSD ein Kreisviereck (244, Z. 4).

Auf ähnliche Weise zeigt man, dass, wenn man BS zieht:

6) ABSJ ein Kreisviereck.

Aus 3, 4, 5 und 6 folgt, dass die Peripherieen der um die in Rede stehenden vier Dreiecke zu beschreibenden Kreise sämmtlich durch den Punkt S gehen. Ist nun P der Mittelpunkt des äussern Kreises des Dreiecks AHD, und man zieht PN, so muss diese Gerade, nöthigenfalls verlängert, die Seite AD, als die gemeinschaftliche Sehne der Kreise P und N, unter rechten Winkeln halbiren (264); da ferner HL = HF (250, Z. 4), so wird, wenn man MH zieht, durch diese Gerade der Winkel AHD halbirt (250); verlängert man daher PN und HM, bis sie sich in T schneiden, so liegt dieser Durchschnittspunkt auf der Peripherie des um $\triangle AHD$ beschriebenen Kreises (A. 442), d. h. des Kreises P; es ist also PNT ein Halbmesser desselben.

Aus ähnlichen Gründen erhält man, wenn Q der Mittelpunkt des äussern Kreises des Dreiecks ABJ ist, und man zieht QN und JM und verlängert sie bis zu ihrem Durchschnitt in U: QNU als Halbmesser des Kreises Q.

Sind nun V und R beziehungsweise die Mittelpunkte der äussern Kreise der Dreiecke CBH und CDJ, und man zieht die Axen PV, QR, so müssen beide, nöthigenfalls verlängert, die Gerade HJ rechtwinkelig schneiden (264), weil HS die gemeinschaftliche Sehne der Kreise P und V, und SJ die gemeinschaftliche Sehne der Kreise Q und R ist:

folglich 7) PV ∥ QR ∥ SN (26, Z. 1 und wegen 1).

Zieht man die Axe VR, so ist

VR ⊥ SC (264), weil SC die gemeinschaftliche Sehne der Kreise V und R ist, folglich:

$\angle ZVY + \angle ZSY = R$ (104)

$= \angle HSC + \angle CBH$ (275 u. wegen 3)

also $\angle ZVY = \angle CBH$, aber:

$\angle ZVY + \angle PVR = 2R$
$= \angle CBH + \angle ABJ$ } (20)

folglich 8) $\angle PVR = \angle ABJ$.

Man ziehe AS, so ist AS die gemeinschaftliche Sehne der Kreise P und Q, daher QPW $\perp$ AS (264)

ebenso: QR $\perp$ SJ, folglich:

$\angle ASJ + \angle PQR = 2R$ (104)
$= \angle PQR + \angle VPQ$ (25 u. wegen 7)

also $\angle VPQ = \angle ASJ$
$= \angle ABJ$ (244, Z. 1 und wegen 6)
$= \angle PVR$ (wegen 8), und da

$\angle VPQ + \angle PQR = \angle PVR + \angle VRQ = 2R$ (25 u. wegen 7)

so ist auch: $\angle PQR = \angle VRQ$

folglich: PVRQ ein Antiparallelogramm (A. 45),

mithin 9) VR = PQ.

Man ziehe VS und RS, so ist:

10) $\angle SVR = \angle SBJ$ (245, Z. 1 und 244)
$= \angle SAJ$ (244, Z. 1 und wegen 6)
$= \angle NPQ$ [weil PN $\perp$ AJ, PQ $\perp$ AS, also
$\angle WPN + \angle SAJ = 2R$ (104) $= \angle WPN + \angle NPQ$ (20)].

Ferner ist AB die gemeinschaftliche Sehne der Kreise Q und N, mithin: QN $\perp$ AB (264), folglich:

$\angle BAS + \angle SAJ + \angle UNT = 2R$ (104)
$= \angle UNT + \angle TNQ$, also

$\angle BAS + \angle SAJ = \angle TNQ$
$= \angle NPQ + \angle NQP$ (38), mithin (wegen 10)

$\angle BAS = \angle NQP$

aber: $\angle BAS = \angle BJS$ (244, Z. 1 und wegen 6)
$= \angle VRS$ (245, Z. 1; 244 und wegen 4)

daher: $\angle VRS = \angle NQP$

folglich wegen 9 und 10:

$\triangle VSR \cong \triangle PNQ$ (46)

Mithin ist der Radius des äussern Kreises des Dreiecks CBH:

VS = PN,

und der Radius des äussern Kreises des Dreiecks CDJ:

RS = NQ.

Aus dem weiter oben bereits Bewiesenen hat man demnach:

11. PT — PN = TN
und QU — NQ = UN
die beiden Unterschiede je zweier der in Rede stehenden vier Halbmesser. Nun ist KE die Polare für J als Pol für Kreis M (A. 567),
daher JM ⊥ KE (A. 562, Anmk.)
LF ⊥ KE (A. 619),
also JM ∥ LF (26, Z. 1),
folglich ∠LGM = ∠UMN (24),
ferner ML und QU ⊥ AH (243 und 264),
also ML ⊥ QU (26, Z. 1),
folglich ∠LMG = ∠UNM (25),
mithin △GML ∾ △MNU (196, Anmk.). Aus ähnlichen
Gründen ist △GME ∾ △MNT,
daher LM : UN = GM : MN = ME : NT,
aber LM = ME (als Radien des Kreises M),
mithin auch UN = TN,
oder wegen 11 PT — PN = QU — NQ; w. z. b. w.

628. Sind in der Ebene eines Kreises drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gegeben, und man sucht die ihnen für den Kreis zugehörigen Polaren, verlängert dieselben bis zum Durchschnitt, verbindet in dem so entstandenen Dreiecke jeden der genannten Punkte mit derjenigen Ecke, die seiner Polare gegenüber liegt, und verlängert diese Geraden bis zum Durchschnitt mit den Gegenseiten oder Polaren, und verbindet endlich diese letztern Durchschnittspunkte untereinander, so sind die sechs Punkte, in denen diese Verbindenden die Peripherie unseres Kreises schneiden — wenn anders ein Schneiden überhaupt stattfindet —, die Spitzen zweier Dreiecke, deren Seiten einzeln durch die drei gegebenen Punkte gehen (Fig. 471.).

A n a l y s i s. Nimmt man auf der Peripherie eines Kreises sechs beliebige Punke K, L, M, N, O, P, verbindet, von einem, K, als erstem ausgehend, den 1sten, 3ten, 5ten, sowie den 2ten, 4ten, 6ten, so erhält man die beiden Dreiecke MOK und PLN, deren Seiten sich einzeln in den Punkten G, H und J schneiden. Zieht man durch die Spitzen dieser Dreiecke Tangenten an den Kreis und verlängert dieselben, bis sie sich schneiden, so sind die Durchschnittspunkte Q, R, S, T, U, V beziehungsweise die Pole zu den Dreiecksseiten (A. 567); verbindet man daher Q und R, S und T, V und U, so erhält man in diesen Verbindenden die Po-

laren zu den Punkten G, H, J (A. 564); man verlängere dieselben bis zu ihrem Durchschnitt in A, B und C.

Vollendet man ferner das Viereck MNOP, so liegt der Durchschnittspunkt D der beiden Gegenseiten MN und OP in gerader Linie mit den Durchschnittspunkten Q und R der an die Ecken M und O, N und P der Dreiecke KMO und LNP, oder hier an je zwei Gegenecken des Vierecks MNOP gezogenen Tangenten (A. 580, Z. 2), also auf BC. Aus ähnlichem Grunde liegen in Bezug auf die Vierecke KLMN und KLOP einerseits der Punkt E auf AC als Durchschnittspunkt der Gegenseiten KL und MN, andererseits der Durchschnittspunkt F der Gegenseiten KL und PO auf AB.

Unser Satz ist nunmehr offenbar erwiesen, wenn dargethan wird, dass von dem so entstandenen Dreieck DEF

die Spitze D mit den Punkten G und A,
die Spitze E mit den Punkten H und B,
die Spitze F mit den Punkten J und C in gerader Linie liegt.

Denn wenn dies der Fall ist, und man betrachtet die Punkte G, H, J als die in der Ebene des Kreises gegebenen, so hat man in den Seiten des Dreiecks ABC die bis zum Durchschnitt in A, B und C verlängerten, jenen Punkten zugehörigen Polaren; in den Geraden AGD, BHE, CJF die Transversalen, von denen jede einen der gegebenen Punkte mit derjenigen Ecke des Dreiecks ABC, die seiner Polare gegenüber liegt, verbindet und bis zum Durchschnitt mit der Gegenseite oder Polare verlängert ist; in den Seiten des Dreiecks DEF die Linien, welche diese letzteren Durchschnittspunkte oder die Fusspunkte der genannten Transversalen untereinander verbinden und die Peripherie unseres Kreises in den sechs Punkten K, L, M, N, O, P schneiden, die die Spitzen zweier Dreiecke KMO und LNP sind, deren Seiten einzeln durch die drei gegebenen Punkte gehen.

Beweis. Es liegen die Durchschnittspunkte W und X der an die Ecken des Vierecks MNOP gezogenen Tangenten in gerader Linie mit den Durchschnittspunkten G und Z der beiden Paare zugeordneter Seiten PN, MO und PM, ON, und G ist der innere, Z der äussere Aehnlichkeitspunkt der von W und X als Mittelpunkten mit den zugehörigen Tangentenlängen als Radien beschriebenen Kreise (A. 581).

Ebenso sind J und H beziehungsweise die innern Aehnlichkeitspunkte der Kreise X und Y und W und Y (vergl. A. 580, Anmk.)

Es liegt aber der Pnnkt Z mit den Punkten J und H in gerader Linie (A. 577), und da der Punkt Z auch auf BC liegt (A. 580, Z. 2), so schneiden sich die Linien HJ, WX, BC in einem Punkte Z; ihre Pole für den gegebenen Kreis liegen mithin in einer geraden Linie (A. 564, Z. 2).

Nun ist G der Pol von BC;
ferner ist AB die Polare vom Punkte J,
AC die Polare vom Pnnkte H,
folglich der Punkt A der Pol von HJ (A. 564);
endlich ist MN die Polare vom Punkte W } (A. 567),
PO die Polare vom Punkte X }
mithin der Pnnkt D der Pol von WX (A. 564);
es liegen also die Punkte G, A und D in gerader Linie.

Aehnlich ist der Beweis, dass auch die Punkte B, H, E, so wie C, J, F in gerader Linie liegen.

629. Sind in der Ebene eines Kreises drei beliebige sich schneidende gerade Linien gegeben, und man sucht die ihnen zugehörigen Pole, verbindet darauf jeden derselben mit derjenigen Ecke des von den gegebenen Geraden gebildeten Dreiecks, welche der Seite, zu der der Punkt als Pol gehört, gegenüber steht, verlängert diese Transversalen bis zum Durchschnitt mit den genannten Gegenseiten oder Polaren, und verbindet endlich deren Fusspunkte untereinander, so sind die sechs Durchschnittspunkte dieser letztern mit dem Umkreise (wenn ein Schneiden überhaupt stattfindet) die Berührungspunkte zweier um unsern Kreis zu beschreibenden Dreiecke, deren Spitzen einzeln auf den zuerst genannten drei gegebenen geraden Linien liegen (Fig. 471.).

Beweis. Die Seiten des Dreiecks KMO gehen einzeln durch die zu den Seiten des Dreiecks ABC gehörigen Pole G, H und J (A. 628); zieht man daher an die Ecken des erstgenannten Dreiecks Tangenten und verlängert sie bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt, so liegen die Spitzen des so entstandenen Dreiecks TVR einzeln auf den Seiten des Dreiecks ABC (A. 564, Z. 1); denn

TR ist die Polare vom Punkte M } (A. 562, Z. 4)
VR die Polare vom Punkte O }
BC die Polare vom Punkte G,
und da M, G und O in gerader Linie liegen, so schneiden sich ihre

zugehörigen Polaren in einem Pnnkte. Aus ähnlichen Gründen liegen der Punkt T auf AC nnd V auf AB.

Auf analoge Weise erhält man ferner das zweite um nnsern Kreis zu beschreibende Dreieck SUQ, dessen Spitzen aus ähnlichen Gründen, wie die oben angegebenen, einzeln auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen, wenn man an die Ecken des zweiten Dreiecks PLN, dessen Seiten einzeln durch die Punkte G, H, J gehen (A. 628), Tangenten zieht und dieselben bis zu ihrem Durchschnitt verlängert; w. z. b. w.

II. Aufgaben.

630. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller der Kreise zu bestimmen, die einen Halbmesser von vorgeschriebener Länge haben und durch einen gegebenen Punkt gehen.

Auflösung. Man beschreibe aus dem gegebenen Punkte als Mittelpnnkt mit der vorgeschriebenen Länge als Radius einen Kreis, so ist die Peripherie desselben der verlangte geometrische Ort.

Beweis ist von selbst einleuchtend.

631. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller der Kreise zu bestimmen, welche, bei vorgeschriebener Grösse ihrer Halbmesser, einen der Lage nnd Grösse nach gegebenen Kreis berühren.

Auflösnng a. Man beschreibe mit der Snmme der beiden gegebenen Halbmesser als Radius einen mit dem gegebenen Kreise concentrischen Kreis, so ist die Peripherie dieses letzteren der verlangte geometrische Ort.

Beweis. Da ein Halbmesser des concentrischen Kreises gleich den beiden gegebenen Radien zusammengenommen ist, diese letztern also in ihren Endpunkten zusammenfallen, wenn man den Mittelpnnkt des Kreises als den Anfangspunkt des Halbmessers des concentrischen Kreises und als den Anfangspunkt des Halbmessers des gegebenen, den Endpunkt des Halbmessers des concentrischen Kreises aber als den Anfangspunkt des vorgeschriebenen Radins betrachtet, so können der gegebene Kreis und der ans dem Endpunkte des Halbmessers den concentrischen als Mittelpunkt mit der vorgeschriebenen Länge als Radius zn beschreibende Kreis sich nur in dem genannten gemeinschaftlichen Endpnnkte ihrer Radien begegnen;

sie berühren mithin einander in diesem Punkte; alle Halbmesser des concentrischen Kreises sind aber einander gleich; der Endpunkt eines jeden kann daher als Mittelpunkt eines der zu beschreibenden Kreise dienen; die Peripherie des concentrischen Kreises ist demnach der verlangte geometrische Ort; w. z. b. w.

Auflösung b. Man beschreibe mit dem Unterschiede der beiden gegebenen Radien einen mit dem gegebenen Kreise concentrischen Kreis, so ist die Peripherie dieses letzteren der verlangte geometrische Ort.

Beweis. Verlängert man einen beliebigen Halbmesser des concentrischen Kreises bis zur Peripherie des gegebenen, so ist, wenn der erstere kleiner als der letztere, die Verlängerung jenes Halbmessers gleich dem vorgeschriebenen Radius (Constr.); ist dagegen der concentrische Kreis gleich oder grösser als der gegebene, so ist der vorgeschriebene Radius gleich dem des concentrischen und des gegebenen Kreises zusammengenommen; in allen drei Fällen haben daher die gegebenen Radien einen gemeinschaftlichen Endpunkt, mithin ist die Peripherie des concentrischen Kreises aus ähnlichen Gründen, wie die im vorigen Beweise angeführten, der verlangte geometrische Ort; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Man sieht leicht, dass bei der Auflösung a die Kreise sich von aussen berühren, bei der Auflösung b aber von innen; dass es demnach zwei geometrische Oerter gibt, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Anmerkung 2. Man sieht ferner aus dem Beweise der Auflösung b, dass, wenn der Unterschied der beiden gegebenen Radien kleiner als der Radius des gegebenen Kreises ist, der concentrische Kreis und mithin auch die zu beschreibenden Kreise ganz innerhalb des gegebenen fallen; ferner, dass, wenn der genannte Unterschied gleich dem Radius des gegebenen Kreises ist, die Peripherie des concentrischen mit der des gegebenen zusammenfällt und mithin dieser letztere ganz innerhalb der zu beschreibenden Kreise liegt; dass endlich, wenn der mehrerwähnte Unterschied grösser als der Radius des gegebenen Kreises ist, dieser ganz innerhalb sowohl des concentrischen, als auch der zu beschreibenden Kreise liegt.

632. Die beiden geometrischen Oerter für die Mittelpunkte aller derjenigen Kreise zu bestimmen, welche, bei vorgeschriebener Grösse ihrer Halbmesser, eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren.

Auflösung. Man ziehe auf jeder Seite der gegebenen Geraden und in einer Entfernung von ihr, die gleich ist der vorgeschriebenen Grösse der Halbmesser, eine Parallele mit derselben, so sind diese beiden Parallelen die verlangten geometrischen Oerter.

Beweis. Die Senkrechten, die man von beliebigen Punkten der Parallelen auf die gegebene Gerade fällt, sind alle von gleicher Länge (31), also gleich der vorgeschriebenen Grösse der Halbmesser der zu beschreibenden Kreise (Constr.); da aber die gegebene Gerade jene Senkrechten oder, was dasselbe ist, die in Rede stehenden Halbmesser in ihren Endpunkten unter rechten Winkeln schneidet, so ist sie eine Tangente aller der Kreise, welche die genannten Senkrechten zu Halbmessern haben (242); die Parallelen sind mithin die beiden geometrischen Oerter für die Mittelpunkte dieser Kreise; w. z. b. w.

633. Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Halbmesser hat und durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht.

Auflösung. Man bestimme den geometrischen Ort für die Mittelpunkte von Kreisen, welche den vorgeschriebenen Halbmesser haben nnd durch einen der gegebenen Punkte gehen (A. 630); darauf auch den geometrischen Ort für die Mittelpunkte von Kreisen, welche den vorgeschriebenen Radius haben und durch den zweiten gegebenen Punkt gehen, so sind die beiden Durchschnittspunkte dieser geometrischen Oerter (wenn ein Schneiden überhaupt stattfindet) die Mittelpunkte zweier den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Kreise.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

Anmerkung. Wenn der vorgeschriebene Radius grösser ist als die Hälfte der Entfernung der gegebenen Punkte von einander, so müssen sich offenbar die beiden geometrischen Oerter schneiden, und da sie Peripherieen von Kreisen sind, so hat man auch zwei Durchschnittspunkte (264); es lassen sich mithin in diesem Falle zwei der in der Aufgabe verlangten Kreise beschreiben; dagegen nur einer, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte jener Entfernung ist; denn alsdann berühren sich die geometrischen Oerter, haben also nur einen, den Berührungspunkt, gemeinschaftlich (263). Ist endlich der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der genannten Entfernung, so können die geometrischen Oerter einander gar nicht begegnen; die Aufgabe ist mithin in diesem Falle nicht zu lösen.

634. Einen Kreis von vorgeschriebenem Halbmesser zu construiren, so dass er zwei der Lage nach gegebene Gerade berührt.

Auflösung. Man bestimme in Betreff jeder der gegebenen Geraden die beiden geometrischen Oerter für die Mittelpunkte der Kreise, welche den vorgeschriebenen Radius haben und die Geraden berühren (A. 632), so sind die vier Durchschnittspunkte dieser Oerter (wenn ein Schneiden überhaupt stattfindet) die Mittelpunkte von vier Kreisen, welche den Anforderungen der Aufgabe genügen.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

Anmerkung. Wenn die gegebenen Geraden sich schneiden, so müssen es auch je zwei der vier geometrischen Oerter, da sie jenen parallel sind; daher lassen sich in diesem Falle vier Kreise beschreiben, wie sie in der Aufgabe verlangt werden; unzählige aber, wenn die gegebenen Geraden parallel sind, und der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte ihres Abstandes von einander ist; denn alsdann fallen die beiden zwischen den gegebenen Geraden befindlichen Oerter zusammen. Die Aufgabe ist endlich nicht zu lösen, wenn die gegebenen Geraden parallel sind, und der vorgeschriebene Halbmesser grösser oder kleiner ist als die Hälfte ihres Abstandes von einander, da in diesem Falle die geometrischen Oerter einander gar nicht begegnen können.

635. Einen Kreis mit vorgeschriebenem Halbmesser zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine der Lage nach gegebene Gerade berührt.

Auflösung. Man bestimme den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche den vorgeschriebenen Radius haben und durch den gegebenen Punkt gehen (A. 630); darauf denjenigen der beiden geometrischen Oerter für die Mittelpunkte der Kreise, welche den vorgeschriebenen Radius haben und die gegebene Gerade berühren (A. 632), der mit dem gegebenen Punkte auf derselben Seite der letzteren liegt, so sind die beiden Durchschnittspunkte dieser Oerter (wenn ein Schneiden überhaupt stattfindet) die Mittelpunkte für zwei der verlangten Kreise.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

Anmerkung. Wenn der vorgeschriebene Radius grösser ist als die Hälfte der Entfernung des gegebenen Punktes von der gegebenen Geraden, so müssen sich die beiden geometrischen Oerter offenbar schneiden, und da der eine die Peripherie eines Kreises, der andere eine gerade Linie ist, so hat man zwei Durchschnittspunkte; daher lassen sich in diesem Falle zwei Kreise beschreiben; dagegen nur einer, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte jener Entfernung ist; denn alsdann berühren sich die geometrischen Oerter und haben mithin nur einen Punkt gemeinschaftlich; ist endlich der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der mehrerwähnten Entfernung, so wird die Lösung der Aufgabe unmöglich, weil die Oerter einander gar nicht begegnen können.

636. Einen Kreis zu construiren, der, bei vorgeschriebener Länge seines Halbmessers, durch einen gegebenen Punkt geht und einen der Lage und Grösse nach gegebenen Kreis berührt.

Auflösung. Man bestimme den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche den vorgeschriebenen Radius haben und durch den gegebenen Punkt gehen (A. 630); darauf sowohl den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche den vorgeschriebenen Radius haben und den gegebenen Kreis von aussen

berühren, als auch den Ort für innere Berührung (A. 631), so sind die Punkte, in denen der zuerst construirte Ort jeden der beiden andern schneidet (wenn ein Schneiden überhaupt stattfindet), die Mittelpunkte von in der Aufgabe verlangten Kreisen.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

Anmerkung 1. Der nöthigen Kürze halber wollen wir in Folgendem die drei in der Auflösung genannten geometrischen Oerter beziehungsweise „den geometrischen Ort für den gegebenen Punkt, für äussere, für innere Berührung“ nennen.

Verbindet man ferner den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises durch eine Gerade und verlängert dieselbe, bis sie den Umkreis zum zweiten Male schneidet, so soll von den beiden Segmenten, in welche diese ganze Linie durch den gegebenen Punkt und ihre beiden Durchschnittspunkte mit der Peripherie getheilt wird, dasjenige, auf welchem der Mittelpunkt des Kreises nicht liegt: „die kleinste Entfernung des gegebenen Punktes von der Peripherie des gegebenen Kreises,“ oder kurzweg: „die kleinste Entfernung,“ das andere Segment hingegen, auf welchem der Mittelpunkt liegt: „die grösste Entfernung“ heissen.

Anmerkung 2. Es sei A (Fig. 472.) der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, B der ausserhalb desselben liegende gegebene Punkt, BC die kleinste, BD die grösste Entfernung des letzteren, also AD und AC Radien des gegebenen Kreises.

Ist nun der vorgeschriebene Halbmesser

$$BE > \tfrac{1}{2}BC,$$

so ist $CE < BE$,

also $AC + CE < AC + BE$,

oder $AE < AC + BE$,

d. h. AE ist kleiner als der Halbmesser des geometrischen Ortes für äussere Berührung, und da der geometrische Ort für den gegebenen Punkt durch den Punkt E geht, so müssen sich beide Oerter schneiden.

Ist also der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der kleinsten Entfernung des gegebenen Punktes, so schneiden sich der geometrische Ort für äussere Berührung und der Ort für den gegebenen Punkt, haben mithin zwei Punkte gemeinschaftlich.

Ist ferner der vorgeschriebene Halbmesser

$$BE = \tfrac{1}{2}BC,$$

so ist $CE = BE$,

also $AE = AC + BE$.

Es geben also die geometrischen Oerter für äussere Berührung und den gegebenen Punkt durch den Punkt E, und da ihre in gerader Linie liegenden Radien AE und BE in ihren Endpunkten zusammenfallen, so berühren die Oerter einander.

Ist daher der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der kleinsten Entfernung des gegebenen Punktes, so berühren die beiden genannten geometrischen Oerter einander, haben also nur einen Punkt gemeinschaftlich.

Ist ferner der vorgeschriebene Radius

$$BE < \tfrac{1}{2}BC,$$

so ist $CE > BE.$

mithin $AE > AC + BE,$

d. h. der Radius des Ortes für äussere Berührung ist kleiner als AE; dieser Ort und der durch den Punkt E gehende Ort für den gegebenen Punkt konnen daher einander nicht begegnen.

Ist also der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der kleinsten Entfernung des gegebenen Punktes, so können die genannten beiden Oerter einander nicht begegnen, sie haben mithin keinen Punkt gemeinschaftlich.

Ist ferner der vorgeschriebene Radius

$$BH > \tfrac{1}{2}BD,$$

so ist $DH < BH,$

also $DH - AD < BH - AD,$

oder $AH < BH - AD,$

d. h. der Halbmesser des geometrischen Ortes für innere Berührung ist grosser als AH, und da der geometrische Ort für den gegebenen Punkt durch den Punkt H geht, so müssen sich beide Oerter schneiden.

Ist also der vorgeschriebene Halbmesser grösser als die Hälfte der grössten Entfernung des gegebenen Punktes, so schneiden sich der geometrische Ort für innere Berührung und der Ort für den gegebenen Punkt, haben mithin zwei Punkte gemeinschaftlich.

Ist ferner der vorgeschriebene Radius

$$BH = \tfrac{1}{2}BD,$$

so ist $DH = BH,$

mithin $DH - AD = BH - AD,$

oder $AH = BH - AD.$

Der geometrische Ort für innere Berührung muss also, gleich dem Orte fur den gegebenen Punkt durch den Punkt H gehen, und da H der gemeinschaftliche Endpunkt der in gerader Linie liegenden Radien AH und BH ist, so berühren sich die beiden Oerter in diesem Punkte.

Ist also der vorgeschriebene Halbmesser gleich der Hälfte der grössten Entfernung des gegebenen Punktes, so berühren sich die genannten geometrischen Oerter, haben daher nur einen Punkt gemeinschaftlich.

Ist endlich der vorgeschriebene Radius

$$BH < \tfrac{1}{2}BD,$$

so ist $DH > BH,$

also $DH - AD > BH - AD,$

oder $AH > BH - AD,$

d. h. der Radius des geometrischen Ortes für innere Berührung ist kleiner als AH, folglich kann dieser Ort dem Orte für den gegebenen Punkt nicht begegnen.

Ist also der vorgeschriebene Radius kleiner als die Halfte der grössten Entfernung des gegebenen Punktes, so können der Ort für innere Berührung und der Ort für den gegebenen Punkt einander nicht begegnen, sie haben mithin keinen Punkt gemeinschaftlich.

Anmerkung 3. Aus den in Anmerk. 2 geführten Beweisen geht Folgendes hervor: Wenn der gegebene Punkt ausserhalb des gegebenen Kreises liegt, so lassen sich

1) vier Kreise, welche den Anforderungen der Aufgabe genügen, und zwar zwei für äussere und zwei für innere Berührung in dem Falle beschreiben, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung des gegebenen Punktes ist;
2) drei Kreise, und zwar zwei für äussere und einer für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Halbmesser gleich der Hälfte der grössten Entfernung des gegebenen Punktes;
3) zwei Kreise, und zwar für äussere Berührung, wenn der genannte Radius kleiner als die Hälfte der grössten, aber grösser als die Hälfte der kleinsten Entfernung des gegebenen Punktes;
4) ein Kreis, und zwar für äussere Berührung, wenn der erwähnte Radius gleich der Hälfte der kleinsten jener Entfernungen ist; endlich wird
5) die Lösung der Aufgabe unmöglich, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der kleinsten Entfernung des gegebenen Punktes ist.

Anmerkung 4. Liegt der gegebene Punkt innerhalb des gegebenen Kreises, so kann offenbar nur von innerer Berührung die Rede sein, und durch ähnliche Beweise, wie die in der zweiten Anmerkung geführten, lässt sich leicht darthun, dass

1) zwei Kreise construirt werden können, wenn der vorgeschriebene Halbmesser kleiner als die Hälfte der grössten, aber grösser als die Hälfte der kleinsten Entfernung des gegebenen Punktes;
2) nur ein Kreis möglich, wenn der genannte Radius gleich der Hälfte der einen, oder gleich der Hälfte der andern jener Entfernungen;
3) die Aufgabe unlösbar wird, wenn der erwähnte Radius grösser als die Hälfte der grössten, oder kleiner als die Hälfte der kleinsten Entfernung des gegebenen Punktes ist.

Anmerkung 5. Wenn der gegebene Punkt auf der Peripherie des gegebenen Kreises liegt, so wird die kleinste Entfernung des erstern gleich Null, die grösste gleich dem Durchmesser; es ist von selbst einleuchtend, dass stets zwei Kreise, einer für innere und einer für äussere Berührung, beschrieben werden können, welche einen gegebenen Kreis in einem bestimmten Punkte berühren, der Radius derselben mag grösser oder kleiner als der Radius des gegebenen Kreises sein; dass stets ein Kreis für äussere Berührung möglich ist, wenn der vorgeschriebene Radius gleich dem Radius des gegebenen Kreises ist; in diesem letztern Falle aber kein Kreis für innere Berührung beschrieben werden kann, weil der geometrische Ort für innere Berührung gleich Null ist.

Anmerkung 6. Es bleibt noch ein besonderer Fall zu erwähnen; wenn nämlich der gegebene Punkt der Mittelpunkt des gegebenen Kreises selbst ist. Da in diesem Falle der geometrische Ort für innere Berührung und der Ort für den gegebenen Punkt concentrische Kreise sind, so ist die Aufgabe offenbar nicht zu lösen, wenn der vorgeschriebene Radius grösser, oder kleiner als die Hälfte des Radius vom gegebenen Kreise ist; ist dagegen jener Halbmesser gleich der Hälfte dieses, so fallen die beiden geometrischen Oerter zusammen, haben also unzählige Punkte gemeinschaftlich, und es lassen sich daher unzählige der verlangten Kreise beschreiben.

637. Einen Kreis zu construiren, der bei vorgeschriebener Länge seines Radius eine der Lage nach gegebene Gerade und einen der Lage und Grösse nach gegebenen Kreis berührt.

Auflösung Man bestimme die beiden geometrischen Oerter für die Mittelpunkte der Kreise, welche den vorgeschriebenen Radius haben und die gegebene Gerade berühren (A. 632); darauf auch für die Mittelpunkte von Kreisen, welche den vorgeschriebenen Radius haben und den gegebenen Kreis berühren, sowohl den geometrischen Ort für innere, als auch für äussere Berührung (A. 631), so sind die Punkte, in denen die beiden letzteren Oerter die zuerst genannten schneiden oder berühren (wenn ein Schneiden oder Berühren überhaupt stattfindet), die Mittelpunkte von Kreisen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

Anmerkung 1. Der nöthigen Kürze halber sollen für die in der Auflösung genannten geometrischen Oerter beziehungsweise die Ausdrücke: „geometrischer Ort für die gegebene Gerade" oder „Ort für die gegebene Gerade," „Ort für innere Berührung," „Ort für äussere Berührung" gebraucht werden. Ferner wollen wir diejenigen Stücke der vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises auf die gegebene Gerade gefällten und bis zum zweiten Durchschnitt mit dem Umkreise verlängerten Senkrechten, welche zwischen dem Fusspunkte dieser letzteren und dem einen und anderen ihrer Durchschnittspunkte mit der Peripherie enthalten sind, beziehungsweise: „die kleinste und die grösste Entfernung der gegebenen Geraden" nennen.

Anmerkung 2. Es möge die gegebene Gerade KJ (Fig. 473.) den gegebenen Kreis schneiden; AB sei die aus dem Mittelpunkte A des letzteren auf KJ gefällte Senkrechte; BC sei die kleinste und BD die grösste Entfernung der gegebenen Geraden, so ist AC = AD = dem Radius des gegebenen Kreises. Es sei ferner BG = BH = dem vorgeschriebenen Radius, so sind die durch G und H mit KJ gezogenen Parallelen PQ und RS die geometrischen Oerter für KJ (A. 632).

I. Ist nun der vorgeschriebene Radius

$$BG = BH < \tfrac{1}{2}BC$$

so ist $BH < CH$

mithin $AH < AB + CH$

$$AB + CH = AC - BH$$

folglich $AH < AC - BH \ldots . 1.$

$$AC - BH < AC + BH$$

folglich $AH < AC + BH \ldots . 2.$

Ferner ist $AH > BH$

$$> BG$$
$$> AG$$

folglich $AG < AC - BH$ (wegen 1) .... 3.

folglich $AG < AC + BH$ (wegen 3) .... 4.

Ist also der vorgeschriebene Radius kleiner, als die Hälfte der kleinsten Entfernung der gegebenen Geraden, so schneiden die geometrischen Oerter für innere und äussere Berührung beide Oerter für die gegebene Gerade; man erhält demnach acht Durchschnittspunkte als Mittelpunkte für zu beschreibende, den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Kreise.

II. Ist der vorgeschriebene Radius

$$BG = BH = \frac{1}{2}BC$$

so ist $CH = BH$

also $AC - CH = AC - BH$

oder $AH = AC - BH$ .... 5.

wegen 5 ist auch $AH < AC + BH$ .... 6.

Ferner ist $AH > BH$

$$> BG$$
$$> AG$$

folglich $AG < AC - BH$ (wegen 5) .... 7.

mithin auch $AG < AC + BH$ .... 8.

Ist also der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der kleinsten Entfernnng der gegebenen Geraden, so berührt der Ort für innere Berührung den einen der beiden Oerter für die gegebene Gerade (5), während der Ort für äussere Berührung denselben schneidet (6); dagegen schneiden sowohl der Ort für innere, als auch der Ort für äussere Berührung den zweiten der geometrischen Oerter für die gegebene Gerade (7, 8); man erhält demnach sieben Punkte für zu beschreibende Kreise.

III. Ist der vorgeschriebene Radius

$$BG = BH > \frac{1}{2}BC,$$

aber $BG = BH < \frac{1}{2}BD,$

so ist $CH < BH$

mithin $AC - CH > AC - BH$

oder $AH > AC - BH$ .... 9.

Da ferner $BH > CH$

so ist $AC + BH > AC + CH$

$$AC + CH > AH$$

folglich $AH < AC + BH$ .... 10.

Ferner ist $AG < BG$
$< BH$
$< AH$
mithin $AG < AC + BH$ (wegen 10) .... 11.
Ferner ist $\frac{1}{2}BD > BG$ (V.)
also $BD > 2BG$
folglich $BD - BG > BG$
d. i. $DG > BG$
mithin $AD - DG < AD - BG$
oder $AG < AD - BG$ .... 12.

Ist also der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der kleinsten, aber kleiner als die Hälfte der grössten Entfernung der gegebenen Geraden, so begegnet der geometrische Ort für innere Berührung dem einen der beiden Oerter für die gegebene Gerade nicht (9), schneidet aber den anderen (12); hingegen werden beide Oerter von dem Orte für äussere Berührung geschnitten (10, 11); man hat daher sechs Punkte als Mittelpunkte für verlangte Kreise.

IV. Ist der vorgeschriebene Radius
$BH = BG = \frac{1}{2}BD$
so ist $DG = BG$
also $AD - DG = AD - BG$
oder $AG = AD - BG$ .... 13.
$AD - BG < AD + BG$
folglich $AG < AD + BG$ .... 14.
Ferner ist $AH > BH$
$> BG$
$> AG$
mithin $AH > AD - BG$ (wegen 13) .... 15.
Ferner ist $AB < BG$
$< BH$
also $AB + BH < 2BH$
oder $AH < 2BH$
aber $BH = \frac{1}{2}BD$ (V.)
also $2BH = BD$
folglich $AH < BD$
$< AD + AB$
$< AD + BG$ .... 16.

Ist also der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung der gegebenen Geraden, so berührt der Ort für innere Berührung den einen der beiden Oerter für die gegebene Gerade (13) und begegnet dem anderen nicht (15); der Ort für äussere Berührung aber schneidet beide (14, 16); man hat daher fünf Punkte als Mittelpunkte von verlangten Kreisen.

V. Ist der vorgeschriebene Radius

$$BH = BG > \tfrac{1}{2}BD$$

so ist $DG < BG$

folglich $AD - DG > AD - BG$

oder $AG > AD - BG \ldots . 17.$

Ferner ist
$$AG < AG + 2DG$$
$$< AD + DG$$
$$< AD + BG \ldots . 18.$$

Ferner ist
$$AH > BH$$
$$> BG$$
$$> AG$$
$$> AD - BG \text{ (wegen 17)} \ldots . 19.$$

Ferner ist
$$AH - AB = BH$$
$$= BG$$

also
$$AH = BG + AB$$
$$< BG + AD \ldots . 20.$$

Ist also der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung der gegebenen Geraden, so begegnet der Ort für innere Berührung keinem der beiden Oerter für die gegebene Gerade (17, 19); dagegen werden beide von dem Orte für äussere Berührung geschnitten (18, 20); man hat demnach vier Mittelpunkte für zu beschreibende Kreise.

Aus I, II, III, IV, V ergibt sich nun Folgendes:

Wenn die gegebene Gerade den gegebenen Kreis schneidet, so lassen sich:

a. acht den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Kreise beschreiben, und zwar vier für innere und vier für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der kleinsten Entfernung der gegebenen Geraden ist;

b. sieben Kreise, und zwar drei für innere und vier für äussere Berührung, wenn der genannte Radius gleich ist der Hälfte jener Entfernung;

c. sechs Kreise, nnd zwar zwei für innere und vier für äussere Berührung, wenn der erwähnte Radius grösser als die Hälfte der kleinsten, aber kleiner als die Hälfte der grössten Entfernnng der gegebenen Geraden;

d. fünf Kreise, und zwar einer für innere und vier für äussere Berührung, wenn der Radius gleich ist der Hälfte der grössten jener Entfernungen;

e. vier Kreise, und zwar für äussere Berührung, wenn der Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung der gegebenen Geraden ist.

Anmerkung 3. Es mögen die gegebene Gerade KJ (Fig. 474.) und der gegebene Kreis ganz aussereinander liegen; AB sei die aus dem Mittelpunkte A auf KJ gefällte Senkrechte; BC die kleinste, BD die grösste Entfernung der gegebenen Geraden, so ist AC = AD = dem Radius des gegebenen Kreises. Es sei ferner BG = BH = dem vorgeschriebenen Radius, so sind die durch G und H mit KJ gezogenen Parallelen PQ, RS die geometrischen Oerter KJ (A. 632).

I. Ist nun der vorgeschriebene Radius

$$BH = BG > \tfrac{1}{2}BD$$

so ist $DG < BG$

also $DG - AD < BG - AD$

oder $AG < BG - AD \ldots 1.$

Wegen 1 ist auch $AG < BG + AD \ldots 2.$

Ferner ist $AH > BG$

$> BG - AD \ldots 3.$

Ferner ist $AH = AB + BH = AB + BG$

$> AB + CG$

$CG = AC - AG = AD - AG$

also $AH > AB + AD - AG$

$> BD - AG$

$BD - AG = BG + AD$

mithin $AH > BG + AD \ldots 4.$

Ist also der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung der gegebenen Geraden, so schneiden die geometrischen Oerter für innere und äussere Berührung den einen der beiden Oerter für die gegebene Gerade (1, 2); können aber dem andern Orte nicht begegnen (3, 4); man erhält daher vier Durchschnittspunkte als Mittelpunkte für zu beschreibende Kreise.

II. Ist der vorgeschriebene Radius

$$BH = BG = \tfrac{1}{2}BD$$

so ist $DG = BG$
mithin $DG - AD = BG - AD$
oder $AG = BG - AD \ldots. 5.$
Wegen 5 ist $AG < BG + AD \ldots. 6.$
Ferner ist $AH > BG$
$> BG - AD \ldots. 7.$
Ferner ist $AH = 2BG + AG$
$= BD + AG$ (V.)
$= BG + AD + 2AG$
$> BG + AD \ldots. 8.$

Ist also der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung der gegebenen Geraden, so berührt der geometrische Ort für innere Berührung den einen der Oerter für die gegebene Gerade (5), kann aber dem andern nicht begegnen (7); dies letztere findet auch statt in Betreff des Ortes für äussere Berührung (8); derselbe schneidet dagegen den ersteren der beiden Oerter für die gegebene Gerade (6); man erhält demnach drei Punkte als Mittelpunkte für verlangte Kreise.

III. Ist der vorgeschriebene Radius
$BH = BG < \frac{1}{2}BD$
aber $BH = BG > \frac{1}{2}BC$
so ist $DG > BG$
mithin $DG - AD > BG - AD$
oder $AG > BG - AD \ldots. 9.$
Ferner ist $AC < AB$
also $AC - CG < AB - CG$
oder $AG < AB - CG$
$AB - CG = AG + BC$
daher $AG < AG + BC$
$AG = AC - CG$
$BC = BG - CG$
also $AG < AC + BG - 2CG$
$< AC + BG \ldots. 10.$
Ferner ist $AH > AG$
$> BG - AD$ (wegen 9)$\ldots. 11.$
Ferner ist $AH = AB + BH$
$> AC + BH \ldots. 12.$

Ist also der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der grössten, aber grösser als die Hälfte der kleinsten Entfernung

der gegebenen Geraden, so kann der Ort für innere Berührung keinem der beiden Oerter für die gegebene Gerade begegnen (9, 11); der Ort für äussere Berührung aber schneidet den einen (10) und begegnet dem andern nicht (12); man hat demnach im Ganzen zwei Punkte als Mittelpunkte für verlangte Kreise.

IV. Ist der vorgeschriebene Radius

$$Bh = Bg = \tfrac{1}{2}BC$$

so ist	$Cg = Bg$
also	$AC + Cg = AC + Bg$
oder	$Ag = AC + Bg \ldots . 13.$
daher auch	$Ag > AC - Bg \ldots . 14.$
Nun ist	$Ah > Ag$
folglich wegen 13	$Ah > AC + Bg \ldots . 15.$
und wegen 14	$Ah > AC - Bg \ldots . 16.$

Ist also der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der kleinsten Entfernung der gegebenen Geraden, so berührt der geometrische Ort für äussere Berührung den einen der beiden Oerter für die gegebene Gerade (13); kann aber dem anderen nicht begegnen (15), und der Ort für innere Berührung begegnet keinem der beiden Oerter für die gegebene Gerade (14, 16); man erhält mithin nur einen Mittelpunkt für einen zu beschreibenden Kreis.

V. Ist der vorgeschriebene Radius

$$Bh = Bg < \tfrac{1}{2}BC$$

so ist	$Cg > Bg$
folglich	$Ag > AC + Bg \ldots . 17.$
mithin auch	$Ag > AC - Bg \ldots . 18.$
Ferner ist	$Ah > Ag$
	$> AC + Bg$ (wegen 17) …. 19.
und	$Ah > AC - Bg$ (wegen 18) …. 20.

Ist also der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der kleinsten Entfernung der gegebenen Geraden, so begegnen die geometrischen Oerter für äussere und innere Berührung keinem der beiden Oerter für die gegebene Gerade.

Aus I, II, III, IV, V geht nun Folgendes hervor:

Wenn die gegebene Gerade und der gegebene Kreis ganz aussereinander liegen, so lassen sich:

a. vier den Anforderungen der Aufgabe genügende Kreise beschreiben, und zwar zwei für innere und zwei für äussere

Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser ist, als die Hälfte der grössten Entfernung der gegebenen Geraden;

b. drei Kreise, und zwar einer für innere und zwei für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich ist der Hälfte jener Entfernung;

c. zwei Kreise, und zwar für äussere Berührung, wenn der genannte Halbmesser kleiner als die Hälfte der grössten, aber grösser als die Hälfte der kleinsten Entfernung der gegebenen Geraden;

d. ein Kreis, und zwar für äussere Berührung, wenn der erwähnte Radius gleich ist der Hälfte der kleinsten jener Entfernungen;

e. die Lösung der Aufgabe wird unmöglich, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der kleinsten Entfernung der gegebenen Geraden ist.

Anmerkung 4. Wenn die gegebene Gerade den gegebenen Kreis berührt und der vorgeschriebene Radius kleiner, oder grösser als der Halbmesser des gegebenen Kreises ist, so muss offenbar der geometrische Ort für äussere Berührung denjenigen Ort für die gegebene Gerade, welcher mit dem Mittelpunkte auf derselben Seite von letzterer liegt, schneiden, den andern Ort dagegen berühren; während der geometrische Ort für innere Berührung nur den zuerst genannten Ort für die gegebene Gerade berühren, dem andern Orte jedoch nicht begegnen kann; es sind mithin in diesem Falle stets vier Kreise, und zwar einer für innere und drei für äussere Berührung möglich.

Ist aber der vorgeschriebene Radius gleich dem des gegebenen Kreises, so wird der geometrische Ort für innere Berührung gleich Null; in diesem Falle können daher nur drei Kreise für äussere Berührung beschrieben werden.

Anmerkung 5. Wenn die gegebene Gerade durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht, und der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des Radius vom gegebenen Kreise ist, so ist leicht zu sehen, dass die geometrischen Oerter für innere und äussere Berührung beide Oerter für die gegebene Gerade schneiden müssen; es lassen sich daher in diesem Falle acht Kreise, und zwar vier für innere und vier für äussere Berührung beschreiben.

Ist der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des Radius des gegebenen Kreises, so lassen sich sechs Kreise, und zwar zwei für innere und vier für äussere Berührung beschreiben.

Ist der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte des Radius vom gegebenen Kreise, so sind vier Kreise für äussere Berührung möglich.

638. Einen Kreis zu construiren, der bei vorgeschriebener Grösse zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kreise berührt.

Auflösung. Man bestimme für jeden der gegebenen Kreise den geometrischen Ort für innere und den geometrischen Ort für

äussere Berührung für die Mittelpunkte von Kreisen, deren Radien die vorgeschriebene Länge haben (A. 631), so sind die Punkte, in denen jeder der beiden Oerter des einen gegebenen Kreises jeden der beiden Oerter des andern schneidet oder berührt (wenn ein Schneiden oder Berühren überhaupt stattfindet), die Mittelpunkte von zu beschreibenden Kreisen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

Anmerkung 1. Zur Abkürzung der Beweise in den nachfolgenden Untersuchungen wollen wir vier Lehrsätze voranschicken:

I. **Zwei Kreise müssen sich stets schneiden, wenn die Summe ihrer Radien grösser, und der Unterschied derselben kleiner als die Entfernung der Mittelpunkte ist.**

Beweis. Wenn die Kreise sich von aussen oder von innen berührten, so wäre im ersteren Falle die Summe, im letzteren der Unterschied der Radien gleich der Entfernung der Mittelpunkte (263, Anmk.), was gegen die Voraussetzung; läge der eine Kreis ganz ausserhalb, oder ganz innerhalb des andern, so wäre im erstern Falle die Summe der Radien offenbar kleiner, im letztern aber der Unterschied derselben grösser, als die Entfernung der Mittelpunkte, was gegen die Voraussetzung; folglich schneiden sich die Kreise.

II. Wenn sowohl die Summe, als auch der Unterschied der Radien zweier Kreise grösser ist, als die Entfernung ihrer Mittelpunkte, so liegt stets der eine Kreis ganz innerhalb des andern.

Beweis. Wenn die Kreise sich von aussen oder von innen berührten, so wäre im erstern Falle die Summe der Radien, im letztern der Unterschied derselben gleich der Entfernung der Mittelpunkte, was gegen die Voraussetzung; wenn die Kreise sich schnitten, so wäre der Unterschied der Radien kleiner, als die Entfernung der Mittelpunkte (264, Anmk.), was gegen die Voraussetzung; läge der eine Kreis ganz ausserhalb des andern, so wäre die Summe der Radien kleiner, als die Entfernung der Mittelpunkte, was gegen die Voraussetzung; folglich muss der eine Kreis ganz innerhalb des andern liegen.

III. Wenn sowohl die Summe, als auch der Unterschied der Radien zweier Kreise kleiner ist, als die Entfernung der Mittelpunkte, so liegen die Kreise stets ganz aussereinander.

Beweis. Berührten sich die Kreise von aussen, oder von innen, so wäre im erstern Falle die Summe, im letztern der Unterschied der Radien gleich der Entfernung der Mittelpunkte, was gegen die Voraussetzung; schnitten sich die Kreise, so wäre die Summe der Radien grösser, als die genannte Entfernung, was gegen die Voraussetznng; läge der eine Kreis ganz innerhalb des andern, so wäre der Unterschied der Radien grösser, als jene Entfernnng, was gegen die Voraussetzung; folglich liegen die Kreise ganz aussereinander.

IV. Wenn die Summe, oder der Unterschied der Radien zweier Kreise gleich ist der Entfernung der Mittelpunkte, so berühren sich im erstern Falle die Kreise von aussen, im letztern von innen.

Beweis. Schnitten sich die Kreise, oder lägen sie ganz aussereinander, oder der eine ganz innerhalb des andern, so wäre im ersten Falle die Summe der Radien grösser und der Unterschied derselben kleiner, als die Entfernung der Mittelpunkte; im zweiten Falle sowohl die Summe, als auch der Unterschied der Radien kleiner, als die genannte Entfernung; im dritten Falle sowohl die Summe, als auch der Unterschied der Radien grösser, als jene Entfernung, was gegen die Voraussetzung; folglich berühren sich die Kreise.

Anmerkung 2. Um zu ermitteln, wie viel von den in vorstehender Aufgabe verlangten Kreisen zu beschreiben möglich sind, und wie sie die gegebenen berühren, ob gleichartig von aussen, oder von innen, oder ungleichartig, hat man zunächst vier Hauptfälle zu unterscheiden, nämlich: wenn die gegebenen Kreise sich schneiden, oder ganz aussereinander liegen, oder sich berühren, oder wenn der eine ganz innerhalb des andern liegt. Da die Möglichkeit der zu beschreibenden Kreise nach obiger Auflösung durch ein Schneiden, oder Berühren der dort näher bezeichneten geometrischen Oerter bedingt wird, so hat man für jeden der genannten vier Hauptfälle zu untersuchen, wann ein solches Schneiden, oder Berühren stattfindet; dies hängt aber ab: erstens von dem Verhältniss der Grösse derjenigen drei Segmente zu einander, in welche die die Mittelpunkte der gegebenen Kreise verbindende und bis zu ihrem zweiten Durchschnitt mit den Umkreisen verlängerte Gerade, welche wir der Kürze halber: „die grösste Entfernung“ nennen wollen, durch ihre Durchschnittspunkte mit den Peripherieen getheilt wird, und zweitens von dem Verhältniss der Länge des vorgeschriebenen Radius zu der Grösse der grössten Entfernung und zu der Grösse der genannten drei Segmente derselben, von denen das zwischen den innern Durchschnittspunkten liegende: „das innere,“ die beiden andern hingegen: „die äussern Segmente“ heissen sollen.

Erster Hauptfall,

wenn die gegebenen Kreise sich schneiden.

Sind K und M (Fig. 475.) die gegebenen Kreise und ist:

A. $CD > AC > BD$;

bezeichnet man den vorgeschriebenen Radius mit R, den Radius des Kreises K mit R_1 und den Radius des Kreises M mit R_2 und es ist:

I. $R < \frac{1}{2}BD$, so ist:

$$\begin{aligned} KM &< R_1 + R_2 \\ &< R_1 + R_2 + 2R \\ &< (R_1 + R) + (R_2 + R) \ldots\ldots 1. \\ KM &> R_1 - R_2 \\ &> R_1 - R_2 + R - R \\ &> (R_1 + R) - (R_2 + R) \ldots\ldots 2. \end{aligned}$$

Aus 1 und 2 folgt, dass sich die geometrischen Oerter für äussere Berührung schneiden (Anmk. 1, I.) .... a.

Ferner ist: $KM + CD = R_1 + R_2$

$CD > 2R$ (V.)

folglich
$$\begin{aligned} KM &< R_1 + R_2 - 2R \\ &< (R_1 - R) + (R_2 - R) \ldots\ldots 3. \\ KM &> R_1 - R_2 \\ &> R_1 - R_2 + R - R \\ &> (R_1 - R) - (R_2 - R) \ldots\ldots 4. \end{aligned}$$

Aus 3 und 4 folgt, dass sich die geometrischen Oerter für innere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... b. Ferner ist:

$$\begin{aligned} KM &< R_1 + R_2 \\ &< R_1 + R_2 + R - R \\ &< (R_1 + R) + (R_2 - R) \ldots\ldots 5. \end{aligned}$$

Da $2R_1 = AC + CD$

$AC < CD$ (V.)

so ist: $R_1 > AC$

und $R_1 < CD$,

daher liegt der Mittelpunkt K zwischen den Punkten C und D.

Da $2R_2 = BD + CD$

$BD < CD$ (V.)

so ist: $R_2 > BD$

und $R_2 < CD$.

Daher liegt auch der Mittelpunkt M zwischen den Punkten C u. D.

Nun ist $2R < BD$ (V.)

folglich $2R + CD < BD + CD$

$$< 2R_2$$

oder $2R - R_2 < R_2 - CD$, also auch

$$2R + R_1 - R_2 < R_1 + R_2 - CD$$

aber $KM = R_1 + R_2 - CD$

folglich $KM > 2R + R_1 - R_2$

$$> (R_1 + R) - (R_2 - R) \ldots 6.$$

Aus 5 und 6 folgt, dass sich der geometrische Ort des Kreises K für äussere Berührung und der Ort des Kreises M für innere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) . . . . c.

Ferner ist: $KM < R_1 + R_2$

$$< R_1 + R_2 + R - R$$

$$< (R_1 - R) + (R_2 + R) \ldots 7.$$

$$KM > R_1 - R_2$$

$$> R_1 - R_2 - 2R$$

$$> (R_1 - R) - (R_2 + R) \ldots 8.$$

Aus 7 und 8 folgt, dass sich der geometrische Ort des Kreises K für innere und der Ort des Kreises M für äussere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) . . . . d.

Ist: II. $R = \frac{1}{2}BD$, so ist:

$$KM < R_1 + R_2$$

$$< R_1 + R_2 + 2R$$

$$< (R_1 + R) + (R_2 + R) \ldots 1.$$

$$KM > R_1 - R_2$$

$$> R_1 - R_2 + R - R$$

$$> (R_1 + R) - (R_2 + R) \ldots 2.$$

Aus 1 und 2 folgt, dass sich die geometrischen Oerter für äussere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) . . . . a.

Aus dem Beweise zu I, 6 wissen wir, dass die Mittelpunkte K und M zwischen den Punkten C und D liegen; es muss aber auch der Mittelpunkt M zwischen dem Mittelpunkte K und dem Punkte D und daher der Mittelpunkt K zwischen M und C liegen; denn fielen die Mittelpunkte K und M zusammen, so wären die gegebenen Kreise concentrisch, was gegen die Voraussetzung; fiele M zwischen K und C, so wäre

$$DK < DM$$

$$< BM$$

oder $R_1 < R_2$, was nicht möglich ist,

da $AC > BD$ (V.)

folglich $AD > BC$
und $R_1 > R_2$.
Mithin muss M zwischen K und D, und K zwischen M und C liegen; daher ist $KM < R_1$
und $KM < R_2$.
Nun ist: $R_1 + R_2 = R_1 + R_2$
$R_2 > BD$ (I, 6)
$BD = 2R$ (V.)
folglich: $R_2 > 2R$
daher $R_1 < R_1 + R_2 - 2R$
mithin $KM < R_1 + R_2 - 2R$
$< (R_1 - R) + (R_2 - R) \ldots 3.$
$KM > R_1 - R_2$
$> R_1 - R_2 + R - R$
$> (R_1 - R) - (R_2 - R) \ldots 4.$

Aus 3 und 4 folgt, dass die geometrischen Oerter für innere Berührung sich schneiden (Anmk. 1, I) .... b. Ferner ist:
$KM = R_1 + BD - R_2$
$BD = 2R$ (V.)
folglich $KM = R_1 - R_2 + 2R$
$= (R_1 + R) - (R_2 - R) \ldots 5.$

Aus 5 folgt, dass sich der Ort des Kreises K für äussere und der Ort des Kreises M für innere Berührung berühren (Anmk. 1, IV) .... c. Ferner ist:
$KM < R_1 + R_2$
$< R_1 + R_2 + R - R$
$< (R_1 - R) + (R_2 + R) \ldots 6.$
$KM > R_1 - R_2$
$> R_1 - R_2 - 2R$
$> (R_1 - R) - (R_1 + R) \ldots 7.$

Aus 6 und 7 folgt, dass sich der geometrische Ort des Kreises K für innere und der Ort des Kreises M für äussere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... d.

III. $R > \frac{1}{2}BD$ und $< \frac{1}{2}AC$.
$KM < R_1 + R_2$
$< R_1 + R_2 + 2R$
$< (R_1 + R) + (R_2 + R) \ldots 1.$
$KM > R_1 - R_2$

$$> R_1 - R_2 + R - R$$
$$> (R_1 + R) - (R_2 + R) \ldots 2.$$

Aus 1 und 2 folgt, dass sich die geometrischen Oerter für äussere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... a.

$$KM < R_2 \ (II, 3)$$
$$2R < AC \ (V.)$$
$$< R_i \ (I, 6)$$

mithin $KM + 2R < R_1 + R_2$

daher $KM < R_1 + R_2 - 2R$

$$< (R_1 - R) + (R_2 - R) \ldots 3.$$
$$KM > R_1 - R_2$$
$$> R_1 - R_2 + R - R$$
$$> (R_1 - R) - (R_2 - R) \ldots 4.$$

Aus 3 und 4 folgt, dass sich die geometrischen Oerter für innere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... b.

Ferner ist: $KM < R_1 + R_2$

$$< R_1 + R_2 + R - R$$
$$< (R_1 + R) + (R_2 - R) \ldots 5.$$
$$KM = R_1 - R_2 + BD$$
$$BD < 2R \ (V.)$$

folglich $KM < R_1 - R_2 + 2R$

$$< (R_1 + R) - (R_2 - R) \ldots 6.$$

Aus 5 und 6 folgt, dass der geometrische Ort des Kreises K für äussere Berührung und der Ort des Kreises M für innere einander nicht begegnen (Anmk. 1, II) .... c.

$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + R - R$$
$$< (R_1 - R) + (R_2 + R) \ldots 7.$$
$$KM > R_1 - R_2$$
$$> R_1 - R_2 - 2R$$
$$> (R_1 - R) - (R_2 + R) \ldots 8.$$

Aus 7 und 8 folgt, dass sich der geometrische Ort des Kreises K für innere Berührung und der Ort des Kreises M für äussere schneiden (Anmk. 1, I) .... d.

IV. $R = \frac{1}{2}AC.$

Es ist: $KM < R_1 + R_2$

$$< R_1 + R_2 + 2R$$
$$< (R_1 + R) + (R_2 + R) \ldots 1.$$
$$KM > R_1 - R_2$$

$$> R_1 - R_2 + R - R$$
$$> (R_1 + R) - (R_2 + R) \ldots 2.$$

Aus 1 und 2 folgt, dass sich die geometrischen Oerter für äussere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... a.

$KM < R_2$ (II, 3)

$2R = AC$ (V.)

$< R_1$ (I, 6)

mithin $KM + 2R < R_1 + R_2$

daher $KM < R_1 + R_2 - 2R$

$< (R_1 - R) + (R_2 - R) \ldots 3.$

$KM > R_1 - R_2$

$> R_1 - R_2 + R - R$

$> (R_1 - R) - (R_2 - R) \ldots 4.$

Aus 3 und 4 folgt, dass sich die Oerter für innere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... b.

$KM < R_1 + R_2$

$< R_1 + R_2 + R - R$

$< (R_1 + R) + (R_2 - R) \ldots 5.$

$KM = R_1 - R_2 + BD$

$BD < AC$ (V.)

$AC = 2R$ (V.)

mithin $BD < 2R$

daher $KM < R_1 - R_2 + 2R$

$< (R_1 + R) - (R_2 - R) \ldots 6.$

Aus 5 und 6 folgt, dass der geometrische Ort des Kreises K für äussere Berührung und der Ort des Kreises M für innere einander nicht begegnen (Anmk. 1, II) .... c.

Ferner ist: $KM = AC + CM - AK$

$= AC + R_2 - R_1$

$AC = 2R$ (V.)

mithin $KM = 2R + R_2 - R_1$

$= (R_2 + R) - (R_1 - R) \ldots 7.$

Aus 7 folgt, dass sich der geometrische Ort des Kreises K für innere Berührung und der Ort des Kreises M für äussere berühren (Anmk. 1, IV) .... d.

V. $R > \frac{1}{2}AC$ und $< \frac{1}{2}CD$.

$KM < R_1 + R_2$

$< R_1 + R_2 + 2R$

$< (R_1 + R) + (R_2 + R) \ldots 1.$

$$\begin{aligned} KM &> R_1 - R_2 \\ &> R_1 - R_2 + R - R \\ &> (R_1 + R) - (R_2 + R) \ldots 2. \end{aligned}$$

Aus 1 und 2 folgt, dass sich die Oerter für äussere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... a.

$$KM = R_1 + R_2 - CD$$
$$CD > 2R \text{ (V.)},$$

mithin $R_1 + R_2 - CD < R_1 + R_2 - 2R$,
und daher

$$\begin{aligned} KM &< R_1 + R_2 - 2R \\ &< (R_1 - R) + (R_2 - R) \ldots 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} KM &> R_1 - R_2 \\ &> R_1 - R_2 + R - R \\ &> (R_1 - R) - (R_2 - R) \ldots 4. \end{aligned}$$

Aus 3 und 4 folgt, dass sich die Oerter für innere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... b.

$$\begin{aligned} KM &< R_1 + R_2 \\ &< R_1 + R_2 + R - R \\ &< (R_1 + R) + (R_2 - R) \ldots 5. \end{aligned}$$

$$KM = R_1 - R_2 + BD$$
$$\begin{aligned} BD &< AC \text{ (V.)} \\ &< 2R \text{ (V.)}, \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} KM &< R_1 - R_2 + 2R \\ &< (R_1 + R) - (R_2 - R) \ldots 6. \end{aligned}$$

Aus 5 und 6 folgt, dass der Ort des Kreises K für äussere und der Ort des Kreises M für innere Berührung einander nicht begegnen (Anmk. 1, II) .... c.

$$\begin{aligned} KM &< R_1 + R_2 \\ &< R_1 + R_2 + R - R \\ &< (R_1 - R) + (R_2 + R) \ldots 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} KM &= AC + CM - AK \\ &= AC + R_2 - R_1 \end{aligned}$$
$$AC < 2R \text{ (V.)},$$

mithin $AC + R_2 - R_1 < 2R + R_2 - R_1$,
daher

$$\begin{aligned} KM &< 2R + R_2 - R_1 \\ &< (R_2 + R) - (R_1 - R) \ldots 8. \end{aligned}$$

Aus 7 und 8 folgt, dass der geometrische Ort des Kreises K für innere Berührung und der Ort des Kreises M für äussere einander nicht begegnen (Anmk. 1, I) .... d.

VI. $R = \frac{1}{2}CD.$

$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + 2R$$
$$> (R_1 + R) + (R_2 + R) \ldots 1.$$
$$KM > R_1 - R_2$$
$$> R_1 - R_2 + R - R$$
$$> (R_1 + R) - (R_2 + R) \ldots 2.$$

Aus 1 und 2 folgt, dass sich die Oerter für äussere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... a.

$$MK = R_1 + R_2 - CD$$
$$CD = 2R \text{ (V.)},$$

mithin $KM = R_1 + R_2 - 2R$

$$= (R_1 - R) + (R_2 - R) \ldots 3.$$

Aus 3 folgt, dass sich die Oerter für innere Berührung berühren (Anmk. 1, IV) .... b.

$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + R - R$$
$$< (R_1 + R) + (R_2 - R) \ldots 4.$$
$$KM = R_1 - R_2 + BD$$
$$BD < CD \text{ (V.)}$$
$$CD = 2R \text{ (V.)},$$

mithin $KM < R_1 - R_2 + 2R$

$$< (R_1 + R) - (R_2 - R) \ldots 5.$$

Aus 4 und 5 folgt, dass der geometrische Ort des Kreises K für äussere Berührung und der Ort des Kreises M für innere einander nicht begegnen (Anmk. 1, II) .... c.

$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + R - R$$
$$< (R_1 - R) + (R_2 + R) \ldots 6.$$
$$KM = AC + CM - AK$$
$$= AC + R_2 - R_1$$
$$AC < CD \text{ (V.)}$$
$$CD = 2R \text{ (V.)}$$

folglich $AC + R_2 - R_1 > 2R + R_2 - R_1$,

mithin $KM > 2R + R_2 - R_1$

$$> (R_2 + R) - (R_1 - R) \ldots 7.$$

Aus 6 und 7 folgt, dass der geometrische Ort des Kreises K für innere Berührung und der Ort des Kreises M für äussere einander nicht begegnen (Anmk. 1, II) ..... d.

VII. $R > \frac{1}{2}CD$ und $< \frac{1}{2}AB$.

$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + 2R$$
$$<(R_1 + R) + (R_2 + R) \ldots 1.$$
$$KM > R_1 - R_2$$
$$> R_1 - R_2 + R - R$$
$$>(R_1 + R) - (R_2 + R) \ldots 2.$$

Aus 1 und 2 folgt, dass die Oerter für äussere Berührung sich schneiden (Anmk. 1, I) .... a.

$$KM = R_1 + R_2 - CD$$
$$CD < 2R \text{ (V.)},$$

mithin $R_1 + R_2 - CD > R_1 + R_2 - 2R$,

daher $KM > R_1 + R_2 - 2R$,

$$>(R_1 - R) + (R_2 - R) \ldots 3.$$
$$KM > R_1 - R_2$$
$$> R_1 - R_2 + R - R$$
$$>(R_1 - R) - (R_2 - R) \ldots 4.$$

Aus 3 und 4 folgt, dass die Oerter für innere Berührung einander nicht begegnen (Anmk. 1, III) .... b.

$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + R - R$$
$$<(R_1 + R) + (R_2 - R) \ldots 5.$$
$$KM = R_1 - R_2 + BD$$
$$BD < CD \text{ (V.)}$$
$$< 2R \text{ (V.)},$$

mithin $R_1 - R_2 + BD < R_1 - R_2 + 2R$,

folglich $KM < R_1 - R_2 + 2R$

$$<(R_1 + R) - (R_2 - R) \ldots 6.$$

Aus 5 und 6 folgt, dass der Ort des Kreises K für äussere Berührung und der Ort des Kreises M für innere einander nicht begegnen (Anmk. 1, II) .... c.

$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + R - R$$
$$<(R_1 - R) + (R_2 + R) \ldots 7.$$
$$KM = AC + CM - AK$$
$$= AC + R_2 - R_1$$
$$AC < CD \text{ (V.)}$$
$$< 2R \text{ (V.)},$$

folglich $AC + R_2 - R_1 < 2R + R_2 - R_1$,

daher $KM < 2R + R_2 - R_1$
$$< (R_2 + R) - (R_1 - R) \ldots 8.$$

Aus 7 und 8 folgt, dass der Ort des Kreises K für innere Berührung und der Ort des Kreises M für äussere einander nicht begegnen (Anmk. 1, II) .... d.

VIII. $R = \frac{1}{2}AB$.

$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + 2R$$
$$< (R_1 + R) + (R_2 + R) \ldots 1.$$
$$KM > R_1 - R_2$$
$$> R_1 - R_2 + R - R$$
$$> (R_1 + R) - (R_2 + R) \ldots 2.$$

Aus 1 und 2 folgt, dass sich die geometrischen Oerter für äussere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... a.

$$KM = AB - R_1 - R_2$$
$$AB = 2R \text{ (V.)},$$

mithin $KM = 2R - R_1 - R_2$
$$= (R - R_1) + (R - R_2) \ldots 3.$$

Aus 3 folgt, dass sich die Oerter für innere Berührung berühren (Anmk. 1, IV) .... b.

$$KM = R_1 - R_2 + BD$$
$$BD < AB$$
$$AB = 2R \text{ (V.)},$$

folglich $R_1 - R_2 + BD < R_1 - R_2 + 2R$,

daher $KM < R_1 - R_2 + 2R$
$$< (R + R_1) + (R - R_2) \ldots 4.$$
$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + R - R$$
$$< (R + R_1) - (R - R_2) \ldots 5.$$

Aus 4 und 5 folgt, dass der geometrische Ort des Kreises K für äussere Berührung und der Ort des Kreises M für innere einander nicht begegnen (Anmk. 1, II) .... c.

$$KM = AC + CM - AK$$
$$= AC + R_2 - R_1$$
$$AC < AB$$
$$AB = 2R \text{ (V.)},$$

folglich $AC + R_2 - R_1 < 2R + R_2 - R_1$

mithin $KM < 2R + R_2 - R_1$
$$< (R - R_1) + (R + R_2) \ldots 6.$$

$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + R - R$$
$$< (R + R_2) - (R - R_1) \ldots. 7.$$

Aus 6 und 7 folgt, dass der geometrische Ort des Kreises K für innere Berührung und der Ort des Kreises M für äussere einander nicht begegnen (Anmk. 1, II) .... d.

IX. $R > \frac{1}{2}AB$.

$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + 2R$$
$$< (R_1 + R) + (R_2 + R) \ldots 1.$$
$$KM > R_1 - R_2$$
$$> R_1 - R_2 + R - R$$
$$> (R + R_1) - (R + R_2) \ldots 2.$$

Aus 1 und 2 folgt, dass sich die Oerter für äussere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... a.

$$KM = AB - R_1 - R_2$$
$$AB < 2R \text{ (V.)}$$

folglich $KM < 2R - R_1 - R_2$

$$< (R - R_1) + (R - R_2) \ldots 3.$$
$$KM > R_1 - R_2$$
$$> R_1 - R_2 + R - R$$
$$> (R - R_2) - (R - R_1) \ldots 4.$$

Aus 3 und 4 folgt, dass sich die Oerter für innere Berührung schneiden (Anmk. 1, I) .... b.

$$KM = R_1 - R_2 + BD$$
$$BD < AB$$
$$< 2R \text{ (V.), mithin}$$
$$R_1 - R_2 + BD < R_1 - R_2 + 2R$$

daher $KM < R_1 - R_2 + 2R$

$$< (R + R_1) + (R - R_2) \ldots 5.$$
$$KM < R_1 + R_2$$
$$< R_1 + R_2 + R - R$$
$$< (R + R_1) - (R - R_2) \ldots 6.$$

Aus 5 und 6 folgt, dass der geometrische Ort des Kreises K für äussere Berührung und der Ort des Kreises M für innere einander nicht begegnen (Anmk. 1, II) .... c.

$$KM = AC + CM - AK$$
$$= AC + R_2 - R_1$$
$$AC < AB$$

$$< 2R \text{ (V.)}$$

folglich $AC + R_2 - R_1 < 2R + R_2 - R_1$

mithin $KM < 2R + R_2 - R_1$

$$< (R - R_1) + (R + R_2) \ldots 7.$$

$$KM < R_1 + R_2$$

$$< R_1 + R_2 + R - R$$

$$< (R + R_2) - (R - R_1) \ldots 8.$$

Aus 7 und 8 folgt, dass der Ort des Kreises K für innere Berührung und der Ort des Kreises M für äussere einander nicht begegnen (Anmk. 1, II) .... d.

Ans A, I—IX ergibt sich nun Folgendes:

Wenn die gegebenen Kreise sich schneiden, nnd das innere Segment grösser ist, als jedes der beiden äussern, diese letzteren aber ebenfalls ungleicb sind, so lassen sich

1) acht der in der Aufgabe verlangten Kreise beschreiben, und zwar zwei für gleichartige Berührung von aussen (I, a), zwei für gleichartige Berührung von innen (I, b) nnd vier für ungleichartige Berührung (I, c, d), wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des kleineren äussern Segmentes ist;
2) sieben Kreise, zwei für äussere (II, a), zwei für innere (II, b), drei für ungleichartige Berührung (II, c, d), wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte jenes Segmentes ist;
3) sechs Kreise, zwei für änssere (III, a), zwei für innere (III, b), zwei für ungleicbartige Berührung (III, d), wenn der vorgeschriebene Radius grösser, als die Hälfte des kleineren, aber kleiner, als die Hälfte des grösseren äussern Segmentes ist;
4) fünf Kreise, zwei für äussere (IV, a), zwei für innere (IV, b), einer für nngleichartige Berübrung (IV, d), wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grössern äussern Segmentes ist;
5) vier Kreise, zwei für äussere (V, a), zwei für innere Berührung (V, b), wenn der vorgescbriebene Radius grösser als die Hälfte des grössern äussern Segmentes, aber kleiner als die Hälfte des innern ist;
6) drei Kreise, zwei für äussere (VI, a), einer für innere Berührung (VI, b), wenn der vorgescbriebene Radius gleich der Hälfte des innern Segmentes ist;

7) zwei Kreise für äussere Berührung (VII, a), wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte des innern Segmentes, aber kleiner als die Hälfte der grössten Entfernung ist;
8) drei Kreise, zwei für äussere (VIII, a), einer für innere Berührung (VIII, b), wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung ist;
9) vier Kreise, zwei für äussere (IX, a), zwei für innere Berührung (IX, b), wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung ist.

Aus Beweisen, welche den unter A geführten analog sind, ergibt sich ferner, dass, wenn das innere Segment kleiner ist, als das eine der beiden äussern, und grösser, als das andere, wenn also

B. $AC < CD < BD$,

1) acht Kreise sich beschreiben lassen, und zwar zwei für äussere, zwei für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner ist, als die Hälfte des kleinern äussern Segmentes;
2) sieben Kreise, zwei für äussere, zwei für innere, drei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des genannten Segmentes;
3) sechs Kreise, zwei für äussere, zwei für innere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte jenes Segmentes ist, aber kleiner als die Hälfte des innern;
4) fünf Kreise, zwei für äussere, einer für innere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des innern Segmentes;
5) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte des innern, aber kleiner als die Hälfte des grössern äussern Segmentes;
6) drei Kreise, zwei für äussere, einer für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grössern äussern Segmentes;
7) zwei Kreise für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radins grösser als die Hälfte des grössern äussern Segmentes, aber kleiner als die Hälfte der grössten Entfernung;
8) drei Kreise, zwei für äussere, einer für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius = der Hälfte der grössten Entfernung;

9) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung ist.

Wenn ferner eines der beiden äussern Segmente kleiner ist, als das andere, dies letztere jedoch gleich dem innern, also

$$\text{C.} \quad CD = AC > BD,$$

so lassen sich

1) acht Kreise beschreiben, zwei für äussere, zwei für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner ist als die Hälfte des kleinern äussern Segmentes;
2) sieben Kreise, zwei für äussere, zwei für innere, drei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des genannten Segmentes;
3) sechs Kreise, zwei für äussere, zwei für innere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte des kleinern äussern, aber kleiner als die Hälfte des grössern äussern, oder, was dasselbe, kleiner als die Hälfte des innern Segmentes ist;
4) vier Kreise, zwei für äussere, einer für innere, einer für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grössern äussern, oder des innern Segmentes;
5) zwei Kreise für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte eines der zuletzt genannten Segmente, aber kleiner als die Hälfte der grössten Entfernung;
6) drei Kreise, zwei für äussere, einer für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung;
7) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung ist.

Wenn ferner die beiden äussern Segmente einander gleich und einzeln kleiner sind, als das innere, also

$$\text{D.} \quad CD > AC = BD,$$

so lassen sich

1) acht Kreise beschreiben, zwei für äussere, zwei für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner ist, als die Hälfte eines der äussern Segmente;

2) sechs Kreise, zwei für äussere, zwei für innere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich ist der Hälfte eines der äussern Segmente;
3) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte eines der äussern Segmente, aber kleiner als die Hälfte des innern;
4) drei Kreise, zwei für äussere, einer für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des innern Segmentes;
5) zwei Kreise für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte des innern Segmentes, aber kleiner als die Hälfte der grössten Entfernung;
6) drei Kreise, zwei für äussere, einer für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung;
7) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung ist.

Wenn ferner das innere Segment kleiner ist, als eines der beiden äussern, und dieses kleiner als das andere, also

$$\text{E.}\quad CD < AC < BD,$$

so lassen sich

1) acht Kreise beschreiben, zwei für äussere, zwei für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner ist, als die Hälfte des innern Segmentes;
2) sieben Kreise, zwei für äussere, einer für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des innern Segmentes;
3) sechs Kreise, zwei für äussere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte des innern Segmentes, aber kleiner als die Hälfte des kleinern äussern;
4) fünf Kreise, zwei für äussere, drei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des kleinern äussern Segmentes;
5) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte

des kleinern äussern, aber kleiner als die Hälfte des grösseren äussern Segmentes;

6) drei Kreise, zwei für änssere, einer für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grössern äussern Segmentes;

7) zwei Kreise für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte des grössern äussern Segmentes, aber kleiner als die Hälfte der grössten Entfernnng;

8) drei Kreise, zwei für äussere, einer für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung;

9) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung ist.

Wenn ferner die beiden äussern Segmente einander gleich und einzeln grösser als das innere sind, also

F. $CD < AC = BD$, so lassen sich

1) acht Kreise beschreiben, zwei für äussere, zwei für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des innern Segmentes;

2) sieben Kreise, zwei für äussere, einer für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des genannten Segmentes;

3) sechs Kreise, zwei für äussere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte des innern, aber kleiner als die Hälfte des einen oder des andern äussern Segmentes;

4) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des einen oder andern änssern Segmentes;

5) zwei Kreise für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radins grösser als die Hälfte des einen oder andern äussern Segmentes, aber kleiner als die Hälfte der grössten Entfernung;

6) drei Kreise, zwei für äussere, einer für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung;

7) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung ist.

Wenn ferner eines der beiden äussern Segmente grösser ist, als das andere, dies letztere aber gleich dem innern, also

$$\text{G.}\quad CD = AC < BD,$$

so lassen sich

1) acht Kreise beschreiben, zwei für äussere, zwei für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des innern oder des kleinern äussern Segmentes;
2) sechs Kreise, zwei für äussere, einer für innere, drei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des innern oder des kleinern äussern Segmentes;
3) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte eines jener Segmente, aber kleiner als die Hälfte des grössern äussern Segmentes;
4) drei Kreise, zwei für äussere, einer für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grösseren äusseren Segmentes;
5) zwei Kreise für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte des grössern äussern Segmentes, aber kleiner als die Hälfte der grössten Entfernung;
6) drei Kreise, zwei für äussere, einer für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung;
7) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung ist.

Wenn endlich die drei Segmente einander gleich sind, also

$$\text{H.}\quad CD = AC = BD,$$

so lassen sich

1) acht Kreise beschreiben, zwei für äussere, zwei für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte eines der Segmente;
2) fünf Kreise, zwei für äussere, einer für innere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte eines Segmentes;
3) zwei Kreise für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte eines Segmentes, aber kleiner als die Hälfte der grössten Entfernung;

4) drei Kreise, zwei für äussere, einer für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung;

5) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung ist.

Zweiter Hauptfall,

wenn die gegebenen Kreise K und M (Fig. 476.) ganz aussereinander liegen.

In diesem Falle ist das innere Segment CD offenbar stets kleiner als jedes der beiden äusseren. Durch ähnliche Beweise, wie die im ersten Hauptfalle unter A geführten, zeigt man, dass, wenn

A. $AC > BD$,

1) acht Kreise sich beschreiben lassen, und zwar zwei für äussere, zwei für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung ist;

2) sieben Kreise, zwei für äussere, einer für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung ist;

3) sechs Kreise, zwei für äussere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der grössten Entfernung, aber grösser als die Hälfte des grössern äussern Segmentes;

4) fünf Kreise, zwei für äussere, drei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grössern äussern Segmentes;

5) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des grössern, aber grösser als die Hälfte des kleinern Segmentes;

6) drei Kreise, zwei für äussere, einer für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des kleinern äussern Segmentes;

7) zwei Kreise für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des kleinern äussern Segmentes, aber grösser als die Hälfte des innern;

8) ein Kreis für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des innern Segmentes ist.

9) Die Aufgabe ist nicht zu lösen, wenn der vorgeshriebene Radius kleiner als die Hälfte des innern Segmentes ist.

Wenn ferner

B. AC = BD,

so lassen sich

1) acht Kreise beschreiben, zwei für äussere, zwei für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung;
2) sieben Kreise, zwei für äussere, einer für innere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung;
3) sechs Kreise, zwei für äussere, vier für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der grössten Entfernung, aber grösser als die Hälfte des äussern Segmentes;
4) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des äussern Segmentes;
5) zwei Kreise für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des äussern, aber grösser als die Hälfte des innern Segmentes;
6) ein Kreis für äussere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des innern Segmentes ist.
7) Die Aufgabe kann nicht gelöst werden, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des innern Segmentes ist.

Dritter Hauptfall,

wenn die gegebenen Kreise K nnd M (Fig. 477.) einander berühren.

In diesem Falle wird das innere Segment gleich Null und die beiden äussern Segmente werden beziehungsweise gleich den Durchmessern, und man zeigt durch ähnliche Beweise, wie die im ersten Hauptfalle nnter A geführten, dass, wenn

A. AC > BC,

1) sechs Kreise sich beschreiben lassen, und zwar zwei für äussere, zwei für innere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernnng;
2) fünf Kreise, zwei für äussere, einer für innere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung;

3) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der grössten Entfernung, aber grösser als die Hälfte des grössern änssern Segmentes;
4) drei Kreise, zwei für äussere, einer für nngleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grössern äussern Segmentes;
5) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des grössern äussern, aber grösser als die Hälfte des kleinern äussern Segmentes;
6) drei Kreise, zwei für äussere, einer für nngleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des kleinern äussern Segmentes;
7) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für ungleichartige Berührnng, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des kleinern äussern Segmentes ist.

Wenn ferner B. AC = BC,

so lassen sich

1) sechs Kreise beschreiben, zwei für äussere, zwei für innere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte der grössten Entfernung;
2) fünf Kreise, zwei für äussere, einer für innere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte der grössten Entfernung;
3) vier Kreise, zwei für äussere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte der grössten Entfernnng, aber grösser als die Hälfte eines Segmentes;
4) zwei Kreise für äussere Berührnng, wenn der vorgeschriebene Radins gleich der Hälfte eines Segmentes;
5) vier Kreise, zwei für änssere, zwei für nngleichartige Berührnng, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte eines Segmentes ist.

Vierter Hauptfall,

wenn einer, M (Fig. 478.), der gegebenen Kreise ganz innerhalb des andern K liegt.

Da der Punkt D ausserhalb des Kreises M liegt, wenn Kreis K > Kreis M, und der Punkt C ansserhalb des Kreises K, wenn

Kreis M > Kreis K, so kann hier von einer grössten Entfernung und deren Segmenten in dem Sinne, wie diese Ausdrücke im Vorhergehenden gebraucht wurden, nicht die Rede sein; wir wollen aber, der Kürze halber, die Stücke AC, BD vom Durchmesser AD des grössten Kreises K, welche zwischen einem seiner Endpunkte und dem diesem zunächst liegenden Durchschnittspunkte mit der Peripherie des innern Kreises enthalten sind: „die äusseren Segmente", Stücke hingegen zwischen einem Endpunkte und dem entferntern Durchschnittspunkte, also AB, CD: „die inneren Segmente" nennen.

Durch ähnliche Beweise, wie die im ersten Hauptfalle unter A geführten, zeigt man, dass, wenn

A. $BD < CD < AC < AB$,

1) die Aufgabe nicht gelöst werden kann, wenn der vorgeschriebene Radius grösser ist als die Hälfte des grössern innern Segmentes;
2) ein Kreis für innere Berührung beschrieben werden kann, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grössern innern Segmentes;
3) zwei Kreise für innere Berührung möglich sind, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des grössern innern, aber grösser als die Hälfte des grössern äussern Segmentes;
4) drei Kreise, zwei für innere, einer für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grössern äussern Segmentes;
5) vier Kreise, zwei für innere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des grössern äussern, aber grösser als die Hälfte des kleinern innern Segmentes;
6) drei Kreise, einer für innere, zwei für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des kleinern innern Segmentes;
7) zwei Kreise für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des kleinern innern, aber grösser als die Hälfte des kleinern äussern Segmentes;
8) ein Kreis für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des kleinern äussern Segmentes;
9) die Aufgabe nicht gelöst werden kann, wenn der vorgeschriebene Radins kleiner als die Hälfte des kleinern äussern Segmentes ist.

Wenn ferner

$$B.\quad BD < CD = AC < AB,$$

so fällt der Punkt C mit dem Mittelpunkte K zusammen; in diesem Falle ist

1) die Aufgabe nicht zu lösen, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte des grössern innern Segmentes; es lassen sich
2) ein Kreis für innere Berührung beschreiben, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grössern innern Segmentes;
3) zwei Kreise für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des grössern, aber grösser als die Hälfte des kleinern innern Segmentes;
4) zwei Kreise, einer für innere, einer für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des kleinern innern Segmentes;
5) zwei Kreise für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des kleinern innern oder des grössern äussern, aber grösser als die Hälfte des kleinern äussern Segmentes;
6) ein Kreis für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des kleinern äussern Segmentes; es ist
7) die Aufgabe nicht zu lösen, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des kleinern äussern Segmentes ist.

Wenn ferner

$$C.\quad BD < AC < CD < AB,$$

so ist

1) die Aufgabe nicht zu lösen, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte des grössern innern Segmentes; es lassen sich beschreiben
2) ein Kreis für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grössern innern Segmentes;
3) zwei Kreise für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des grössern innern, aber grösser als die Hälfte des kleinern innern Segmentes;
4) ein Kreis für innere Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des kleinern innern Segmentes; es kann

5) die Aufgabe nicht gelöst werden, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte des kleinern innern, aber grösser als die Hälfte des grössern äussern Segmentes; es lassen sich
6) ein Kreis für ungleichartige Berührung beschreihen, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des grössern äussern Segmentes;
7) zwei Kreise für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radins kleiner als die Hälfte des grössern äussern, aber grösser als die Hälfte des kleinern äussern Segmentes;
8) ein Kreis für ungleichartige Berührung, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte des kleinern äussern Segmentes; es kann
9) die Aufgabe nicht gelöst werden, wenn der vorgeschriebene Radins kleiner als die Hälfte des kleinern änssern Segmentes ist. Wenn ferner

D. $AC = BD < CD = AB$,

so sind die gegebenen Kreise concentrisch, und es ist
1) die Aufgabe nicht zu lösen, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die Hälfte eines der innern Segmente; es lassen sich
2) unendlich viele Kreise für innere Berührung beschreiben, wenn der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte eines innern Segmentes; denn alsdann fallen die beiden geometrischen Oerter für innere Berührung zusammen, haben also unendlich viele Punkte gemeinschaftlich; es ist
3) die Aufgabe nicht zn lösen, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte eines der innern, aber grösser als die Hälfte eines der äussern Segmente; es lässt sich
4) ein Kreis für ungleichartige Berührung beschreiben, wenn der vorgeschriehene Radius gleich der Hälfte eines der äussern Segmente; endlich ist
5) die Aufgabe nicht zu lösen, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner als die Hälfte eines der äussern Segmente ist.

639. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller derjenigen Kreise zn bestimmen, deren Halbmesser von vorgeschriebener Grösse und deren Peripherie eine vorgeschriebene Entfernung von einem gegebenen Punkte haben.

Auflösung. Man beschreibe aus dem gegebenen Punkte A (Fig. 479.), als Mittelpunte, sowohl mit der Snmme, AC, als auch mit dem Unterschiede, AD, der vorgeschriebenen Entfernung AB

und des vorgeschriebenen Halbmessers, BC = BD, als Radien zwei Kreise, so sind die Peripherieen derselben zwei geometrische Oerter für die Mittelpunkte der verlangten Kreise.

Beweis. Beschreibt man aus C und D als Mittelpunkten mit dem vorgeschriebenen Radius Kreise, so gehen beide durch den Punkt B (Constr.), ihre Peripherieen haben also vom gegebenen Punkte A die vorgeschriebene Entfernung AB; ein Gleiches gilt für jeden andern Punkt der Peripherieen der mit AC und AD aus A beschriebenen Kreise; mithin sind dieselben die verlangten geometrischen Oerter.

Anmerkung 1. Es ist gleichgültig, ob der vorgeschriebene Radius grösser oder kleiner als die vorgeschriebene Entfernung; ist diese aber gleich jenem, so wird der Unterschied gleich Null, der geometrische Ort oder die Peripherie des aus dem gegebenen Punkte mit dem Unterschiede beschriebenen Kreises wird demnach nur ein Punkt, der gegebene nämlich; es lässt sich also aus ihm, als Mittelpunkt, auch nur ein Kreis beschreiben, dessen Halbmesser die vorgeschriebene Grösse und dessen Peripherie die vorgeschriebene Entfernung vom gegebenen Punkte hat. Ist daher der vorgeschriebene Radius gleich der vorgeschriebenen Entfernung, so gibt es nur einen, in allen übrigen Fallen aber zwei der in der Aufgabe verlangten geometrischen Oerter.

Anmerkung 2. Man sieht leicht, dass, wenn der vorgeschriebene Radius grösser als die vorgeschriebene Entfernung ist, diese letztere gleich ist der kleinsten Entfernung (A. 636, Anmk. 1) des gegebenen Punktes von den Peripherieen der Kreise, deren Mittelpunkte durch denjenigen geometrischen Ort bestimmt werden, dessen Radius gleich ist dem Unterschiede der vorgeschriebenen Entfernung und des vorgeschriebenen Halbmessers; und dass, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner ist als die vorgeschriebene Entfernung, diese gleich der grössten Entfernung (A. 636, Anmk. 1) des gegebenen Punktes von den Peripherieen der so eben näher bezeichneten Kreise ist.

Dagegen ist die vorgeschriebene Entfernung stets gleich der kleinsten Entfernung (A. 636, Anmk. 1) des gegebenen Punktes von den Peripherieen derjenigen Kreise, deren Mittelpunkte durch den zweiten geometrischen Ort, den nämlich, dessen Halbmesser gleich ist der Summe der vorgeschriebenen Entfernung und des vorgeschriebenen Radius, bestimmt werden, gleichviel, ob der vorgeschriebene Radius grösser oder kleiner als die vorgeschriebene Entfernung oder gleich derselben ist.

640. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Halbmesser von vorgeschriebener Länge, und dessen Umkreis von zwei gegebenen Punkten vorgeschriebene Entfernungen hat.

Auflösung. Man bestimme die geometrischen Oerter aller derjenigen Kreise, deren Halbmesser die vorgeschriebene Länge, und deren Peripherieen von dem einen und von dem andern gegebenen Punkte die vorgeschriebene Entfernung haben (A. 639), so

sind die Durchschnitts- oder Berührungspunkte jener Oerter (wenn ein Schneiden oder Berühren überhaupt stattfindet) die Mittelpunkte von Kreisen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction in Verbindung mit A. 639.

Anmerkung 1. Es ist einleuchtend, dass so viele der in der Aufgabe verlangten Kreise beschrieben werden können, als es Durchschnitts- und Berührungspunkte der vier geometrischen Oerter gibt, von denen je zwei zu einem der gegebenen Punkte gehören, dass also, je nach der Lage dieser letzteren zu einander und der Grösse der vorgeschriebenen Entfernungen und des vorgeschriebenen Halbmessers von einem bis zu acht Kreisen möglich sind, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen; dass diese jedoch nicht zu lösen ist, wenn die geometrischen Oerter ganz aussereinander liegen.

Anmerkung 2. Diese Aufgabe kann als eine Verallgemeinerung der vorhergehenden angesehen werden.

641. Die beiden geometrischen Oerter für die Mittelpunkte aller der Kreise zu finden, die, bei gegebener Grösse des Halbmessers, eine der Lage nach gegebene Gerade so schneiden, dass das Stück, welches Sehne ist, eine vorgeschriebene Länge hat.

Anmerkung 1. Anstatt des umständlicheren Ausdrucks: „ein Kreis schneidet eine der Lage nach gegebene Gerade so, dass das innerhalb desselben gelegene Stück der letzteren eine vorgeschriebene Länge hat," wollen wir der nöthigen Kürze halber künftig blos sagen: „ein Kreis schneidet eine gegebene Gerade für eine gegebene Länge", und einer ähnlichen Abkürzung wollen wir uns beim Schneiden zweier Kreise bedienen.

Auflösung. Man schneide auf der gegebenen Geraden AB (Fig. 480.) an einer beliebigen Stelle derselben das Stück CD = der gegebenen Länge ab, beschreibe aus den Endpunkten C und D dieses Stückes, als Mittelpunkten, mit dem vorgeschriebenen Radius zwei Kreise und ziehe durch deren Durchschnittspunkte E und F mit AB die Parallelen GH und KJ, so sind diese die verlangten geometrischen Oerter.

Beweis. Man ziehe CE und DE und aus einem beliebigen Punkte L der Geraden GH nach der Geraden AB:

$$LM \parallel CE \text{ und } LN \parallel DE,$$

so ist $$CE = DE \text{ (Constr.).}$$

Ein aus E als Mittelpunkt mit CE als Radius beschriebener Kreis muss also durch die Punkte C und D gehen; dieser Kreis hat demnach den vorgeschriebenen Halbmesser und das vorgeschriebene Stück CD der gegebenen Geraden AB als Sehne (Constr.).

Da ferner	GH ∥ AB LM ∥ CE LN ∥ DE	(Constr.),
so sind	CELM und DELN Parallelogramme,	
folglich	CE = LM DE = LN	(26, Z.)
	$\angle$ CEM = $\angle$ MLN (A. 4),	
mithin	$\triangle$ CED $\cong$ $\triangle$ MLN (45),	
daher	CD = MN.	

Hieraus folgt, dass ein aus L als Mittelpunkt mit ML = CE = ED = LN als Radius beschriebener Kreis durch die Punkte M und N gehen muss, also das Stück MN = CD = der vorgeschriebenen Länge der Geraden AB als Sehne hat; dieser Kreis ist daher ein den Bedingungen der Aufgabe entsprechender; da aber der Mittelpunkt L ganz beliebig auf der Geraden GH genommen war, so gilt ein Gleiches für jeden andern Punkt von GH, mithin ist GH einer der in der Aufgabe verlangten geometrischen Oerter.

Der Beweis dafür, dass KJ der zweite geometrische Ort ist, ist dem eben geführten ganz ähnlich.

Anmerkung 2. Man sieht leicht, dass, wenn das vorgeschriebene Stück, welches Sehne werden soll, doppelt so gross ist als der gegebene Radius, die beiden geometrischen Oerter mit der gegebenen Geraden zusammenfallen; man hat in diesem Falle also nur einen geometrischen Ort; die gegebene Gerade selbst und das vorgeschriebene Stück derselben wird zum Durchmesser; es müssen sich daher in diesem Falle die in der Auflösung erwähnten beiden Hülfskreise berühren.

Ist dagegen das vorgeschriebene Stück, welches Sehne werden soll, grösser als die doppelte Länge des vorgeschriebenen Radius, so müssen offenbar die beiden Hülfskreise ganz aussereinander liegen, und die Lösung der Aufgabe wird mithin unmöglich.

Aus dem eben Gesagten geht demnach hervor, dass zur Lösung der Aufgabe die Bedingung erforderlich ist: dass das vorgeschriebene Stück, welches Sehne werden soll, kleiner sei als die doppelte Länge des vorgeschriebenen Halbmessers.

642. Einen Kreis zu beschreiben, der, bei vorgeschriebener Länge des Halbmessers, zwei der Lage nach gegebene gerade Linien für eine vorgeschriebene Länge schneide (A. 641, Anmk. 1).

Auflösung. Man suche für jede gegebene gerade Linie die beiden geometrischen Oerter für die Mittelpunkte aller der

Kreise, welche die vorgeschriebene Länge des Radius haben und die gegebene Gerade für die vorgeschriebene Länge schneiden (A. 641), so sind die Punkte, in denen sich die vier Oerter schneiden (wenn ein Schneiden überhaupt stattfindet), die Mittelpunkte von vier Kreisen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction in Verbindung mit A. 641.

Anmerkung 1. Sind die gegebenen Geraden parallel, so sind es natürlich auch die geometrischen Oerter; es ist einleuchtend, dass in diesem Falle die Aufgabe nur dann lösbar ist, wenn die zwischen den gegebenen Geraden befindlichen Oerter zusammenfallen; da alsdann diese beiden Oerter nicht blos einen, sondern alle Punkte mit einander gemein haben, so lassen sich auch unendlich viele Kreise, den Bedingungen der Aufgabe entsprechend, beschreiben.

Anmerkung 2. Diese Aufgabe kann als eine Erweiterung der früheren, A. 634, betrachtet werden.

643. Einen Kreis von vorgeschriebener Grösse so zu construiren, dass seine Peripherie von einem gegebenen Punkte eine vorgeschriebene Entfernung hat, und er eine der Lage nach gegebene Gerade für eine bestimmte Länge (A. 641, Anmk.) schneidet.

Auflösung. Man suche die geometrischen Oerter sowohl aller derjenigen Kreise, welche von der vorgeschriebenen Grösse sind und deren Peripherieen von dem gegebenen Punkte die vorgeschriebene Entfernung haben (A. 639), als auch der Kreise, welche gleichfalls von der vorgeschriebenen Grösse sind und die gegebene Gerade für die bestimmte Länge schneiden (A. 641), so sind die Durchschnittspunkte jener Oerter die Mittelpunkte von Kreisen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Beweis ergibt sich ohne Weiteres aus der Construction in Verbindung mit A. 639 und 641.

Anmerkung. Diese Aufgabe kann als eine Erweiterung der früheren A. 635 angesehen werden.

644. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller der Kreise zu finden, welche für einen gegebenen Halbmesser einen der Lage und Grösse nach gegebenen Kreis für eine vorgeschriebene Länge, d. h. so schneiden, dass die gemeinschaftliche Sehne eine vorgeschriebene Länge hat.

Auflösung. Man trage in den gegebenen Kreis die vorgeschriebene Länge AB als Sehne ein (Fig. 481.); beschreibe aus einem ihrer Endpunkte, A, als Mittelpunkt mit dem vorgeschrie-

benen Radius einen Kreis; fälle aus dem Mittelpunkte M des gegebenen Kreises auf die Sehne AB eine Senkrechte und verlängere sie nach beiden Seiten, bis sie den aus A beschriebenen Kreis in G und H schneidet; beschreibe endlich aus M zwei Kreise, von denen der eine das Stück GM jener Senkrechten, der andere das Stück HM zum Halbmesser hat, so sind diese beiden Kreise zwei geometrische Oerter, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Beweis. Man ziehe AG, BG, AM, BM; beschreibe aus einem beliebigen Punkte, J, der Peripherie des mit GM als Radius beschriebenen Kreises einen Kreis mit dem vorgeschriebenen Radius, verbinde seine Durchschnittspunkte mit dem gegebenen Kreise sowohl unter einander, als auch mit den Mittelpunkten J und M durch die Geraden KL, KJ, KM, LJ, ML; ziehe endlich noch MJ, so ist $KM = BM$, als Radien eines Kreises,

$KJ = BG$, als Radien gleicher Kreise,

$JM = GM$, als Radien eines Kreises,

folglich: $\triangle KJM \cong \triangle BGM$ (60).

Aus ähnlichen Gründen ist:

$\triangle JLM \cong \triangle GAM$,

daher: $\angle KJM = \angle BGM$

und $\angle MJL = \angle AGM$, also auch:

$\angle KJL = \angle AGB$,

folglich: $\triangle KJL \cong \triangle AGB$ (45),

mithin: $KL = AB =$ der gegebenen Sehnenlänge (Constr.).

Es haben also der aus J mit dem vorgeschriebenen Radius beschriebene und der gegebene Kreis das Stück $KL =$ der vorgeschriebenen Länge als gemeinschaftliche Sehne. Ein gleicher Beweis gilt nun auch für jeden andern Punkt der Peripherie des aus M mit GM beschriebenen Kreises, da der Punkt J ganz beliebig genommen war; mithin ist der letztgenannte Kreis der verlangte geometrische Ort. Dass aber auch ein solcher Ort der aus M mit MH als Radius beschriebene Kreis sei, ist leicht durch einen dem obigen ganz analogen Beweis darzuthun; w. z. b. w.

Anmerkung. Durch einen Blick auf die Figur überzeugt man sich leicht, dass, wenn der vorgeschriebene Radius kleiner ist, als die Hälfte des als Sehne bestimmten Stückes AB, die Senkrechte GH den aus A mit dem vorgeschriebenen Radius beschriebenen Kreis nicht schneiden kann, dass mithin in diesem Falle die Lösung der Aufgabe unmöglich wird. Und ist der vorgeschriebene Radius gleich der Hälfte von AB, so wird die Senkrechte GH eine Tangente;

in diesem Falle hat man nur einen geometrischen Ort, und zwar ist der Halbmesser desselben das Stück der Tangente, welches zwischen dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises und dem Berührungspunkte enthalten ist.

645. Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Halbmesser hat und zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kreise für vorgeschriebene Längen schneidet.

Auflösung. Man bestimme die geometrischen Oerter für die Mittelpunkte aller der Kreise, welche den vorgeschriebenen Radius haben und jeden der gegebenen Kreise für die für ihn vorgeschriebene Länge schneiden (A. 644), so sind die Durchschnitts- oder Berührungspunkte jener Oerter (wenn ein Schneiden oder Berühren überhaupt stattfindet) die Mittelpunkte von Kreisen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction in Verbindung mit A. 644.

Anmerkung 1. Es ist einleuchtend, dass, je nach der Lage der gegebenen Kreise zu einander und nach der Grösse des vorgeschriebenen Radius im Verhältniss zu den vorgeschriebenen Längen der Sehnen, entweder die Aufgabe gar nicht zu lösen ist, oder aber von einem bis zu acht von in der Aufgabe verlangten Kreisen beschrieben werden können. Vergl. A. 644, Anmk.

Anmerkung 2. Diese Aufgabe kann als eine Erweiterung der früheren, A. 638, angesehen werden.

646. Wenn ein Kreis und in seiner Ebene ein beliebiger Punkt gegeben ist, durch letzteren eine Gerade so zu ziehen, dass sie den ersteren für eine gegebene Länge schneidet (A. 641, Anmk. 1).

Auflösung. Es sind bei der Auflösung zwei Fälle zu unterscheiden und zwar erstlich, wenn der gegebene Punkt ausserhalb, zweitens wenn er innerhalb des gegebenen Kreises liegt.

Erster Fall,

wenn der gegebene Punkt ausserhalb des gegebenen Kreise liegt.

Man verbinde den gegebenen Punkt C (Fig. 482.) mit dem Mittelpunkte M des gegebenen Kreises durch die Gerade CM und beschreibe mit derselben als Halbmesser aus M als Mittelpunkt einen Kreis. Hierauf trage man in den gegebenen Kreis die vorgeschriebene Länge AB als Sehne ein und verlängere sie über einen ihrer Endpunkte A, bis sie die zweite Peripherie in D schneidet; ziehe DM und AM; mache den Winkel CME = AMD; verbinde die Punkte C und E, in denen die Schenkel des Winkels CME, und zwar der eine den Umkreis des Hülfskreises, der andere

des gegebenen schneiden, durch die Gerade CE und verlängere dieselbe über E bis zum zweiten Durchschnitt F mit dem gegebenen Kreise, so ist diese Gerade CF die verlangte.

Beweis. Ziehe BM und FM, so ist:

$\angle DMA = \angle CME$ (Constr.)

$AM = ME$ (als Radien)

$DM = CM$ (als Radien)

folglich: $\triangle AMD \cong \triangle EMC$ (45)

daher $\angle DAM = \angle CEM$

folglich auch: $\angle MAB = \angle MEF$ (20)

da aber $AM = BM = EM = FM$ (als Radien),

so ist $\angle MBA = \angle MAB$
und $\angle MFE = \angle MEF$ } (51)

mithin $\angle MBA = \angle MFE$, also auch

$\angle MAB + \angle MBA = \angle MEF + \angle MFE$

folglich: $\angle AMB = \angle EMF$ (38)

mithin $\triangle AMB \cong \triangle EMF$ (45),

daher $EF = AB =$ der vorgeschriebenen Länge; es schneidet also die von dem gegebenen Punkte C aus gezogene Gerade CF den gegebenen Kreis für die vorgeschriebene Länge EF; w. z. b. w.

Zweiter Fall,

wenn der gegebene Punkt innerhalb des gegebenen Kreises liegt.

Man verbinde den gegebenen Punkt C (Fig. 483.) mit dem Mittelpunkte M des gegebenen Kreises durch die Gerade CM und beschreibe mit derselben als Halbmesser aus M als Mittelpunkt einen Kreis. Hierauf trage man in den gegebenen Kreis die vorgeschriebene Länge AB als Sehne ein; verbinde einen der Punkte, D, in welchen AB die Peripherie des Hülfskreises schneidet, mit dem Mittelpunkte M durch die Gerade DM; ziehe AM und mache den Winkel CME = AMD; verbinde die Punkte C und E, in denen die Schenkel des Winkels CME, und zwar der eine die Peripherie des Hülfskreises, der andere die des gegebenen schneiden, durch die Gerade CE und verlängere CE über C bis zum zweiten Durchschnitt in F mit dem Umkreise des gegebenen Kreises, so ist diese Gerade ECF die verlangte.

Beweis. Ziehe FM, so ist aus ähnlichen Gründen wie die im Beweise des ersten Falles angeführten:

$\triangle DMA \cong \triangle CME$

daher: $\angle MAD = \angle MEC$

oder $\angle MAB = \angle MEF$

und analog dem weiteren Beweise des ersten Falles ist auch hier nun: $\triangle ABM \cong \triangle EFM$

und daher EF = AB = der vorgeschriebenen Länge.

Da aber EF durch den Punkt C geht, so ist EF die verlangte Gerade; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Durch einen Blick auf die Figuren 482 und 483 überzeugt man sich leicht, dass, wenn der gegebene Punkt ausserhalb des gegebenen Kreises liegt, die Aufgabe unmöglich wird, sobald die vorgeschriebene Länge grösser ist, als der Durchmesser, weil der Durchmesser die grösste Sehne ist; und dass, wenn der gegebene Punkt innerhalb des gegebenen Kreises liegt, die Aufgabe ebenfalls nicht gelöst werden kann, einmal in dem eben angegebenen Falle, aber auch alsdann nicht, wenn die vorgeschriebene Länge kleiner ist, als diejenige Sehne, welche senkrecht auf dem durch den gegebenen Punkt gehenden Durchmesser steht; es folgt dies aus 249, 3 und 5. Hieraus erhellt auch, dass, wenn die vorgeschriebene Länge AB (Fig. 483) ganz ausserhalb des Hülfskreises liegt, ohne ihm zu begegnen, dieselbe eben zu klein und die Aufgabe nicht zu lösen ist; sie muss, soll die Aufgabe möglich sein, den Hülfskreis wenigstens berühren, und in diesem Falle hat man nur nöthig, durch den gegebenen Punkt eine Tangente an den Hülfskreis zu ziehen und dieselbe bis zum Durchschnitt mit der Peripherie des gegebenen Kreises nach beiden Seiten hin zu verlängern, so ist dies die geforderte Gerade; oder aber die vorgeschriebene Länge AB muss den Hülfskreis schneiden.

Anmerkung 2 Aus 249, 4 und 250, 3 folgt, dass sich durch den gegebenen Punkt zwei Gerade ziehen lassen, welche den Anforderungen der Aufgabe genügen.

647. Wenn zwei Kreise der Lage und Grösse nach gegeben sind, eine Gerade zu ziehen, welche beide Kreise berührt.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, wenn nämlich die Kreise gleich, und wenn sie ungleich sind.

Erster Fall,
wenn die Kreise gleich sind.

Auflösung A. Man ziehe in einem der Kreise den Durchmesser CD (Fig. 484.) senkrecht zur Axe AB und durch die Endpunkte desselben mit der letzteren die Parallelen CE und DF, so sind diese zwei gemeinschaftliche Tangenten der gegebenen Kreise.

Beweis. Man ziehe durch den Mittelpunkt B die bis zu ihrem Durchschnitt mit CE und DF verlängerte Gerade EF parallel zu CD, so ist:

CE ∥ AB ∥ DF (Constr.)
CD ⊥ AB (Constr.)
folglich CD ⊥ CE und DF (25, Zus.)
mithin CEFD ein Rechteck (56, Zus. 2)
daher EF ⊥ CE und DF
und EF = CD (56).

Da aber die Kreise gleich sind, und CD ein Durchmesser ist, so ist auch die Gerade EF, welche durch den Mittelpunkt B geht, ein solcher; und da beide Durchmesser in ihren Endpunkten durch CE und DF unter rechten Winkeln geschnitten werden, so sind CE und DF zwei gemeinschaftliche Tangenten der gegebenen Kreise (242); w. z. b. w.

Auflösung B. Man beschreibe mit einem der gegebenen Kreise, B, einen concentrischen Kreis, dessen Radius gleich dem Durchmesser des gegebenen Kreises ist; beschreibe hierauf über der Axe AB als Durchmesser einen zweiten Kreis; die Durchschnittspunkte G und H dieser beiden Hülfskreise verbinde man durch die Geraden AG, AH, BG, BH mit den Mittelpunkten der gegebenen Kreise und ziehe endlich durch die Punkte K und L, in denen BG und BH den gegebenen Kreis B schneiden, zwei Parallelen mit AG und AH, nämlich KJ ∥ AG und LM ∥ AH, so sind KJ und LM zwei gemeinschaftliche Tangenten der gegebenen Kreise.

Beweis. Man ziehe aus A mit BG und BH die beiden bis zum Durchschnitt mit KJ und LM verlängerten Parallelen AJ und AM, so sind AGKJ und AHLM Parallelogramme (Constr.), und
da ∠AGB = ∠AHB = R (246),
so sind AGKJ und AHLM Rechtecke (56, Zus. 2).
Nun ist BK = $\frac{1}{2}$BG (Constr.)
= GK
= AJ (56);
und da BK ein Radius der gegebenen Kreise, so ist auch AJ ein solcher. Aus ähnlichen Gründen ist AM gleichfalls ein Radius der gegebenen Kreise.

Es schneidet also die Gerade KJ die Halbmesser BK und AJ, die Gerade LM die Halbmesser BL und AM in ihren Endpunkten unter rechten Winkeln; folglich sind KJ und LM zwei gemeinschaftliche Tangenten der gegebenen Kreise (243); w. z. b. w.

Zweiter Fall,

wenn die gegebenen Kreise ungleich sind.

Auflösung A. Man beschreibe mit dem grössern gegebenen Kreise, B (Fig. 485.), einen concentrischen, dessen Radius gleich ist dem Unterschiede der Radien der beiden gegebenen Kreise; beschreibe hierauf über der Axe AB dieser letzteren als Durchmesser einen zweiten Kreis; ziehe durch die Durchschnittspunkte G und H dieser beiden Hülfskreise die Radien BE und BF des grössern gegebenen Kreises; verbinde jene Durchschnittspunkte G und H, welche zugleich die Endpunkte der Halbmesser BG und BH des zuerst beschriebenen Hülfskreises sind, mit dem Mittelpunkte A des kleinern gegebenen Kreises durch die Geraden AG und AH und ziehe endlich mit diesen Geraden durch die Endpunkte E und F der Radien BE und BF des grössern gegebenen Kreises zwei Parallelen, nämlich CE ∥ AG und DF ∥ AH, so sind CE und DF zwei gemeinschaftliche Tangenten der gegebenen Kreise.

Beweis. Man ziehe aus A mit BE und BF Parallelen und verlängere sie, bis die erstere CE in C, die andere DF in D schneidet, also AC ∥ BE und AD ∥ BF, so sind ACEG und ADFH Parallelogramme (Constr.), und da

$\angle AGB = \angle AHB = R$ (246),

also auch $\angle AGE = \angle AHF = R$ (20),

so sind ACEG und ADFH Rechtecke (56, Zus. 2).

Nun ist BG = dem Unterschiede der Radien der gegebenen Kreise

$BG = BE - GE$. [(Constr.)

Mithin ist, da BE ein Radius des grössern,

GE = dem Radius des kleinern Kreises

$GE = AC$ (56)

folglich AC ein Radius des kleinern Kreises.

Aus ähnlichen Gründen ist auch AD ein solcher Radius.

Da aber die Geraden CE und DF, die eine die Radien BE und AC, die andere die Radien BF und AD in ihren Endpunkten rechtwinkelig schneiden, so sind CE und DF gemeinschaftliche Tangenten der gegebenen Kreise (242); w. z. b. w.

Auflösung B. Man beschreibe mit einem der gegebenen Kreise, B, einen concentrischen, dessen Radius gleich ist der Summe der Radien der beiden gegebenen Kreise; hierauf beschreibe man über der Axe AB dieser letzteren als Durchmesser einen zweiten Kreis und verbinde die Durchschnittspunkte J und N der beiden

Hülfskreise mit den Mittelpunkten der gegebenen durch die Geraden BJ, BN, AJ, AN; ziehe nun durch die Punkte K und M, in denen BJ und BN den gegebenen Kreis B schneiden, zwei Parallelen mit AJ und AN, nämlich KL ∥ AJ und MO ∥ AN, so sind KL und MO zwei gemeinschaftliche Tangenten der gegebenen Kreise.

Beweis. Man ziehe aus A zwei Parallelen mit BJ und BN und verlängere sie, bis sie die mit AJ und AN gezogenen Parallelen KL und MO in L und O schneiden, also AL ∥ BJ und AO ∥ BN, so sind AJKL und ANMO Parallelogramme (Constr.), und da $\angle AJB = \angle ANB = R$ (246), so sind die genannten Parallelogramme rechtwinkelig (56, Zus. 2).

Nun ist BJ = der Summe der Radien der gegebenen Kreise (Constr.)
BJ = BK + BJ,
aber BK der Radius des grössern Kreises,
folglich KJ = dem Radius des kleinern
KJ = AL (56)
mithin AL ein Radius des kleinern gegebenen Kreises.
Aus ähnlichen Gründen ist auch AO ein solcher Radius.

Da nun die Geraden KL und MO, die erstere die Radien AL und BK, die letztere die Radien AO und BM in ihren Endpunkten unter rechten Winkeln schneiden, so sind KL und MO zwei gemeinschaftliche Tangenten der gegebenen Kreise (242); w. z. b. w.

Anmerkung. Aus den obigen Auflösungen ist ersichtlich, dass jederzeit vier gemeinschaftliche Tangenten gezogen werden können, wenn die gegebenen Kreise ganz aussereinander liegen. Berühren sich dieselben dagegen von aussen, so lassen sich nur drei gemeinschaftliche Tangenten ziehen, nämlich zwei äussere und eine innere, welche letztere diejenige Gerade ist, welche im Berührungspunkte der Kreise senkrecht auf deren Axe steht. Wenn sich die gegebenen Kreise schneiden, so sieht man leicht, dass nur zwei gemeinschaftliche Tangenten gezogen werden können. Berühren sich die Kreise von innen, so ist offenbar blos eine Tangente möglich. Liegt endlich der eine der gegebenen Kreise ganz innerhalb des andern, so verlangt die Aufgabe etwas Unmögliches.

648. Wenn zwei Kreise der Lage und Grösse nach gegeben sind, eine Gerade so zu ziehen, dass sie die Kreise für vorgeschriebene Längen (A. 644) schneidet.

Auflösung. Man trage in den gegebenen Kreis A (Fig. 486.) die Länge CD, für welche er geschnitten werden soll, als Sehne beliebig ein, ebenso in den andern gegebenen Kreis die für diesen vorgeschriebene Länge EF; fälle aus den Mittelpunkten auf die

eingetragenen Sehnen die Senkrechten AG und BH; beschreibe sowohl mit AG als Radius aus A, als auch mit BH als Radius aus B zwei Kreise und ziehe an dieselben eine gemeinschaftliche Tangente KL (A. 647), die man bis zum zweiten Durchschnitt mit den Peripherieen der gegebenen Kreise verlängert, so ist diese so entstandene Gerade MN die in der Aufgabe verlangte.

Beweis. Man ziehe in den gegebenen Kreisen die Radien AC und AM, BF und BP und in den Hülfskreisen die Radien AK und BL nach den Berührungspunkten der gemeinschaftlichen Tangente, so ist $\angle AKM = R$ (243)

$= \angle AGC$ (Constr.)

$AK = AG$ als Radien,

$AM = AC$ als Radien,

folglich $\triangle AKM \cong \triangle AGC$ (49),

daher $KM = CG$,

$KM = \frac{1}{2}MO$, $CG = \frac{1}{2}CD$ (248),

mithin $MO = CD =$ der vorgeschriebenen Länge (Constr.). Ganz ähnlich ist der Beweis, dass auch

$PN = EF =$ der vorgeschriebenen Länge

ist; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Was in der Anmerkung zur vorhergehenden Aufgabe gesagt wurde, gilt beziehungsweise auch hier. Wie man sieht, kommt es auf die gegenseitige Lage, nicht der gegebenen, sondern der Hülfskreise an. Wenn diese letzteren ganz aussereinander liegen, so lassen sich vier gemeinschaftliche Tangenten an dieselben ziehn, und wir erhalten also in diesem Falle vier Gerade, welche die gegebenen Kreise für die vorgeschriebenen Längen schneiden. Berühren sich die Hülfskreise von aussen, so sind drei der gedachten Geraden möglich; zwei, wenn sich jene Kreise schneiden; nur eine, wenn sie sich von innen berühren; und endlich kann die Aufgabe gar nicht gelöst werden, wenn der eine Hülfskreis ganz innerhalb des andern liegt.

Anmerkung 2. Unsere Aufgabe kann als eine Erweiterung der vorhergehenden betrachtet werden.

649. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise zu finden, welche einen gegebenen Halbmesser haben und einen der Grösse und Lage nach gegebenen Kreis rechtwinkelig schneiden (A. 595).

Anflösung. Man errichte auf einem beliebigen Halbmesser AB (Fig. 487.) des gegebenen Kreises in seinem Endpunkte B eine Senkrechte BC gleich der Länge des gegebenen Halbmessers für die Kreise, für deren Mittelpunkte der geometrische Ort gefunden

werden soll; ziehe AC und beschreibe mit AC als Radius einen concentrischen Kreis mit dem gegebenen, so ist die Peripherie desselben der gesuchte geometrische Ort.

Beweis. Man beschreibe aus einem beliebigen Punkte D der Peripherie des concentrischen Kreises einen Kreis, dessen Radius gleich dem gegebenen BC ist, und verbinde einen der Durchschnittspunkte, E, dieses und des gegebenen Kreises mit den Mittelpunkten D und A durch die Geraden DE und AE, ziehe die Axe AD, so ist: AD = AC als Radien eines Kreises

DE = BC (Constr.) = dem gegebenen Radius (Constr.)

AE = AB als Radien eines Kreises,

folglich $\triangle AED \cong \triangle ABC$ (50),

daher $\angle AED = \angle ABC$

$\angle ABC = R$ (Constr.),

mithin $\angle AED = R$.

Es wird also der Radius DE in seinem Endpunkte E durch die Gerade AE, und der Radius AE in seinem Endpunkte E durch die Gerade DE unter rechten Winkeln geschnitten; mithin ist AE eine Tangente des Kreises D und DE eine Tangente des gegebenen Kreises (212); da sich nun die genannten beiden Tangenten in dem Durchschnittspunkte E des Kreises D und des gegebenen rechtwinkelig schneiden, so schneidet Kreis D den gegebenen rechtwinkelig (A. 595); ein ähnlicher Beweis gilt nun auch, da der Punkt D ganz beliebig auf der Peripherie des mit dem gegebenen Kreise concentrischen genommen wurde, für jeden andern Punkt dieser Peripherie; mithin ist dieselbe der verlangte geometrische Ort; w. z. b. w.

650. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller der Kreise zu finden, welche zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kreise rechtwinkelig schneiden.

Auflösung. Man bestimme die Potenzlinie (A. 592) der gegebenen Kreise, so ist dieselbe der gesuchte geometrische Ort.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction und aus A. 596.

Anmerkung. Wenn die gegebenen Kreise sich berühren oder schneiden, so ist ihre Potenzlinie, wie aus A. 593, Zus. 2 und 3 ersichtlich, leicht zu bestimmen; ebenso, wenn die Kreise ganz aussereinander liegen, man hat alsdann nur nöthig, das zwischen den Berührungspunkten einer ihrer gemeinschaftlichen Tangenten enthaltene Stück zu halbiren und vom Halbirungspunkte eine Senkrechte auf die Axe der Kreise zu fällen, so ist diese Senkrechte die Potenzlinie, wie sich aus A. 593, Zus. 1 und 4 ergibt.

Liegt der eine der gegebenen Kreise ganz innerhalb des andern (Fig. 488), so suche man zu dem Unterschiede der beiden zwischen den Umkreisen enthaltenen Stucke der Axe und diesen beiden Stucken die vierte Proportionale, also zu DE — GF, DE und GF, verlängere die Axe über den Endpunkt des kleineren der genannten Stucke hinaus um die Länge jener vierten Proportionale und ziehe durch den Endpunkt der Verlängerung eine Gerade senkrecht zur Axe, so ist diese Senkrechte die Potenzlinie der Kreise.

Beweis. Man mache KE = GF; ziehe von D aus unter einem beliebigen Winkel die Gerade DM = EK = GF; ziehe KM und durch E eine bis zum Durchschnitt mit der verlängerten DM verlängerte Gerade EN ∥ KM; verlängere DG über G, mache die Verlängerung GH = DN und ziehe durch H die Gerade PO ⊥ DH, so ist:

$$DK : DM = DE : DN \quad (195, \text{ Zus } 1)$$
$$DK = DE - EK = DE - GF \quad (\text{Constr.})$$
$$DM = GF \quad (\text{Constr.})$$
$$DN = GH \quad (\text{Constr.}).$$

Setzt man diese Werthe in obige Proportion, so erhält man:

$$DE - GF : GF = DE : GH,$$

oder, da $DE = GE$ (als Radien)

$$DE - GF : GF = GE : GH,$$

daher $GH(DE - GF) = GE \,.\, GF$ (203, Zus. 3),

oder $GH \,.\, DE - GH \,.\, GF = GE \,.\, GF$

und $GH \,.\, DE = GE \,.\, GF + GH \,.\, GF.$

Addirt man hierzu $GH \,.\, HE = GH \,.\, HE$, so hat man:

$$GH \,.\, DE + GH \,.\, HE = GE \,.\, GF + GH \,.\, GF + GH \,.\, HE$$

oder: $GH(DE + HE) = GF(GE + GH) + GH \,.\, HE$ (72)

oder: $GH \,.\, DH = GF \,.\, HE + GH \,.\, HE$

$$= HE(GF + GH) \quad (72)$$
$$= HE \,.\, HF$$

mithin: $GH : HF = HE : DH$ (203, Zus. 2),

d. h. die Entfernungen des Punktes H, durch welchen PO senkrecht zur Axe gezogen wurde, von den näheren Durchschnittspunkten der Axe mit den Umkreisen verhalten sich umgekehrt wie die von den entfernteren, folglich ist PO die Potenzlinie der Kreise (A. 593).

651. Einen Kreis zu construiren, welcher drei gegebene rechtwinkelig schneidet.

Auflösung. Man bestimme die Potenzlinie je zweier Kreise und beschreibe aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei Potenzlinien mit der von ihm an einen der Kreise gezo-

genen Tangente als Radius einen Kreis, so ist derselbe der in der Aufgabe verlangte.

Beweis. Dass die drei Potenzlinien einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, ist in A. 594 bewiesen; dass dieser Durchschnittspunkt für die drei gegebenen Kreise ein Punkt gleicher Potenzen ist, folgt aus A. 592; dass mithin die Quadrate der von ihm aus an die Kreise gezogenen Tangenten, und also auch diese selbst, einander gleich sind, ergibt sich aus A. 589, Zus. 1; folglich schneidet der aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei Potenzlinien als Mittelpunkt mit der von ihm aus an einen der Kreise gezogenen Tangente als Radius beschriebene Kreis die gegebenen drei rechtwinkelig (A. 596); w. z. b. w.

652. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei der Lage nach gegebene, nicht parallele Linien berührt und durch einen gegebenen Punkt geht, der auf der Geraden liegt, welche den von den beiden ersteren gebildeten Winkel halbirt.

Auflösung. Man errichte auf der Winkelhalbirenden AD (Fig. 489.) in dem gegebenen Punkte D eine Senkrechte und verlängere sie nach beiden Seiten, bis sie die gegebenen Linien in B und C schneidet; halbire hierauf einen der bei B und C so entstandenen Winkel und beschreibe aus dem Durchschnittspunkte E dieser und der ersten Winkelhalbirenden mit dem zwischen diesem Durchschnittspunkte und dem gegebenen enthaltenen Stück ED der letzteren als Radius einen Kreis, so ist derselbe der verlangte.

Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Construction in Verdung mit 272, Zus. 1.

Anmerkung. Wenn die gegebenen Geraden parallel laufen, so ändert sich die Sache nicht wesentlich; denn der gegebene Punkt würde alsdann gleiche Entfernungen von jenen haben; man würde daher von D die Senkrechte DB auf AB fällen, sie über D bis C, dem Durchschnitt mit AC, verlängern; dann auf BC in D eine Senkrechte DE = BD = CD errichten und aus E mit DE als Radius einen Kreis beschreiben, so würde dieser, wie leicht zu sehen, die Linien AB und AC berühren und durch den Punkt D gehen.

653. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei der Lage nach gegebene nicht parallele Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Auflösung. Man construire einen beliebigen Kreis E (Fig. 490.) (A. 652), dessen Mittelpunkt auf der Geraden liegt, die den Winkel halbirt, welchen die gegebenen Geraden AB und AC bilden, und welcher die gegebenen Geraden berührt; verbinde

hierauf den Durchschnittspunkt A der letzteren mit dem gegebenen Punkte D durch die Gerade AD und ziehe nach dem Durchschnittspunkte derselben und des Umkreises den Radius EF; mit EF ziehe man durch D die bis zum Durchschnitt mit der Winkelhalbirenden verlängerte Parallele DG und beschreibe aus G mit GD als Halbmesser einen Kreis, so ist dieser der verlangte.

Beweis. Da die Radien EF und GD parallel sind (Constr.), so ist der Punkt A der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise E und G (A. 576), mithin sind AB und AC Aehnlichkeitslinien derselben (A. 576), und da diese Linien den Kreis E berühren (Constr.), so berühren sie auch Kreis G (A. 576, Z. 4), folglich ist Kreis G der geforderte; w. z. b. w.

654. Einen Kreis zu construiren, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine der Lage nach gegebene Gerade berührt.

Auflösung. Man verbinde die gegebenen Punkte A und B (Fig. 491.) durch eine Gerade und verlängere dieselbe bis zum Durchschnitt C mit der gegebenen Geraden CG; schneide auf dieser von C aus ein Stück CD ab gleich der mittleren Proportionale zwischen der ganzen durch die Verlängerung von AB erhaltenen Linie AC und der Verlängerung BC; vollende nun das Dreieck ABD, errichte auf dessen Seiten in ihren Halbirungspunkten Senkrechte und beschreibe aus deren gemeinschaftlichem Durchschnittspunkte M (A. 21) als Mittelpunkt mit der Entfernung MD dieses Punktes von einer der Ecken (A. 21, Z.) als Radius einen Kreis, so ist derselbe der verlangte.

Beweis. Da Kreis M durch die gegebenen Punkte A und B geht (Constr.), so ist AC eine Secante; und da AC : CD = CD : BC (Constr.) oder $CD_q = AC_r BC$ (Constr.), so muss, weil Kreis M auch durch den Punkt D geht (Constr.), die gegebene Gerade CG eine jenen Kreis in D berührende Tangente sein (259); Kreis M ist daher der verlangte; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Die mittlere Proportionale zwischen AC und BC findet man, indem man über AC einen Halbkreis beschreibt, dann auf AC in B eine bis zum Durchschnitt mit demselben verlängerte Senkrechte BH errichtet und CH zieht, so ist CH die gesuchte mittlere Proportionale (209, Z. 2); denn zieht man AH, so ist ∠ AHC = R (246) = ∠ CBH (Constr.); man hat also in obiger Auflösung CD = CH zu machen.

Anmerkung 2. Wenn die Verbindungslinie AB (Fig. 492.) der beiden gegebenen Punkte mit der gegebenen Linie CG parallel läuft, so errichte man auf AB im Halbirungspunkte E eine bis zum Durchschnitt D mit CG verlängerte Senk-

rechte ED; vollende Dreieck ABD und beschreibe einen Kreis um dasselbe, so ist dieser der verlangte; denn $\triangle$ ABD ist gleichschenkelig (A. 35 f.) und DE das Höhenperpendikel; daher muss der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt M (A. 21) der drei auf den Seiten in ihren Halbirungspunkten errichteten Senkrechten auf DE liegen; MD ist also ein Radius des Kreises; aber AB $\parallel$ CG, DE $\perp$ AB (Constr.), mithin auch DE oder MD $\perp$ CG (26, Z.), folglich CG eine Tangente (242); also Kreis M der verlangte.

655. Wenn zwei Punkte (A, B, Fig. 493. und 494.) und ein Kreis gegeben, auf der Peripherie des letzteren den Punkt (D) zu finden, durch welchen sich zwei Sehnen (BDE und ADF) so ziehen lassen, dass sie einzeln durch die gegebenen Punkte gehen, und dass die ihre nicht gemeinschaftlichen Endpunkte verbindende Gerade (EF) parallel ist der durch die beiden gegebenen Punkte bestimmten geraden Linie (AB).

Anflösung a. Wenn die beiden Punkte A und B ausserhalb des Kreises liegen (Fig. 493.), so ziehe man von B aus eine Tangente BC an den Kreis, suche zu AB und BC die dritte Proportionale und trage von B aus auf AB (nöthigenfalls verlängert) ein Stück BG gleich dieser dritten Proportionale auf; ziehe vom Endpunkte G des aufgetragenen Stückes die Tangente GE an den Kreis und verbinde den Berührungspunkt E mit dem Punkte B durch die Gerade EB, so ist der Punkt D, in welchem diese Verbindende den Umkreis schneidet, der gesuchte.

Beweis. Man ziehe AD, verlängere AD bis F, dem zweiten Durchschnitt mit der Peripherie und ziehe die Gerade EF, so ist

$AB : BC = BC : BG$ (Constr.),

daher $BC_q = AB_r BG$ (203, Z. 3)

$BC_q = BE_r BD$ (259),

folglich $AB_r BG = BE_r BD$,

mithin $AB : BD = BE : BG$ (202, Z. 5)

$\angle ABD = \angle EBG$,

folglich $\triangle ABD \sim \triangle EBG$ (198),

mithin $\angle BAD = \angle BEG$

$\angle BEG = \angle EFD$ (247),

folglich $\angle BAD = \angle EFD$,

mithin $EF \parallel AB$ (26).

Daher ist der Punkt D, durch welchen von den gegebenen Punkten aus die Sehnen DE und DF gezogen sind, deren Endpunkts-Verbindungslinie EF parallel der Verbindungslinie AB ist, der gesuchte; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Um die dritte Proportionale zu AB und BC zu bestimmen, mache man BH = BC, ziehe AC und durch H mit AC eine bis zum Durchschnitt J mit der verlängerten BC verlängerte Parallele HJ, so ist BJ die gesuchte dritte Proportionale; denn es ist AB : BC = BH : BJ (195, Z. 1); BC = BH (Constr.), also AB : BC = BC : BJ. Man hat also in obiger Auflösung BG = BJ zu machen.

Auflösung b. Wenn die beiden Punkte A und B innerhalb des Kreises liegen (Fig. 494.), so mache man BG gleich der dritten Proportionale (Anmk. 1) zu AB und der zu B gehörigen halben Mittelsehne; ziehe von G aus die Tangente GE an den Kreis, verbinde den Berührungspunkt E mit dem Punkte B durch die Gerade EB und verlängere EB bis zum zweiten Durchschnitt D mit dem Umkreise, so ist dieser Durchschnittspunkt D der verlangte.

Beweis. Man ziehe DA, verlängere DA, bis sie den Umkreis zum zweiten Male in F schneidet und ziehe EF, so ist, wenn BH die zum Punkte B gehörige halbe Mittelsehne ist:

$AB : BH = BH : BG$ (Constr.),

daher $BH_q = AB_r BG$ (203, Z. 3)

$BH_q = BD_r BE$ (251),

mithin $AB_r BG = BD_r BE$,

demnach $AB : BD = BE : BG$ (202, Z. 5)

$\angle ABD = \angle EBG$ (22),

folglich $\triangle ABD \sim \triangle EBG$ (198),

daher $\angle BAD = \angle BEG$

$\angle BEG = \angle EFD$ (247),

folglich $\angle BAD = \angle EFD$,

mithin $EF \parallel AB$ (26).

Vom Punkte D aus sind also durch die beiden gegebenen Punkte A und B zwei Sehnen DF und DE gezogen, und die Verbindungslinie der Endpunkte dieser letzteren, EF, läuft mit der Verbindungslinie AB der gegebenen Punkte parallel; folglich ist der Punkt D der in der Aufgabe verlangte; w. z. b. w.

Anmerkung 2. Zieht man anstatt der Tangente GE die ihr gleiche zweite Tangente GK, führt alsdann die weitere Construction analog der in den obigen Auflösungen aus, so erhält man einen zweiten Punkt, M, auf der Peripherie des gegebenen Kreises, welcher den Anforderungen der Aufgabe entspricht; denn

Beweis a. (Fig. 493.) $BC_q = BG_r AB$ (Constr. u. 203, Z. 3)

$BC_q = BM_r BK$ (259),

mithin $BG : BK = BM : AB$ (203, Z. 5)

$\angle GBK = \angle ABM$,

folglich $\triangle BGK \sim \triangle AMB$ (198),
daher $\angle GKB = \angle MAB$
$\angle LKG = \angle AMB$ (247),
also auch $\angle GKB + \angle LKG = \angle MAB + \angle AMB$,
aber $\angle GKB + \angle LKG + \angle LKM = 2R$ (20)
$\angle MAB + \angle AMB + \angle MBA = 2R$ (38),
folglich $\angle LKM = \angle MBA$,
mithin $KL \parallel AB$ (26).

Die von M aus gezogenen Sehnen ML und MK gehen also durch die gegebenen Punkte, und die ihre nicht gemeinschaftlichen Endpunkte Verbindende KL ist der die gegebenen Punkte Verbindenden AB parallel; w. z. b. w.

Beweis b. (Fig. 494.) $BH_q = AB_r BG$ (Constr. u. 203, Z. 3)
$BH_q = BK_r BM$ (251).

Hieraus folgt nun aus ähnlichen Gründen, wie die oben angeführten:
$\triangle ABM \sim \triangle KBG$,
daher $\angle MAB = \angle BKG = \angle MLK$ (247),
also $KL \parallel AB$ (26).

Aus den oben angegebenen Gründen ist mithin auch hier der Punkt der verlangte; w. z. b. w.

656. Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.

Auflösung. Man suche für die gegebenen Punkte A und B (Fig. 493. und 494.) nach Anleitung von A. 655. auf der Peripherie des gegebenen Kreises den Punkt D, durch welchen sich die beiden Sehnen DE und DF so ziehen lassen, dass sie einzeln durch die gegebenen Punkte gehen, und dass die ihre nicht gemeinschaftlichen Endpunkte verbindende Gerade EF parallel ist der durch die beiden gegebenen Punkte bestimmten Geraden AB; ziehe hierauf die Halbmesser ND und NF und durch A mit NF eine Parallele AO nach dem verlängerten Radius ND, so ist O der Mittelpunkt und DO der Halbmesser des zu construirenden Kreises.

Beweis. $NF \parallel AO$ (Constr.),
folglich $\angle DAO = \angle DFN$ (25)
$= \angle NDF$ (51)
$= \angle ADO$ (22)
folglich $AO = DO$ (52).

Zieht man nun NE und BO, so ist

$$DN : DO = DF : DA \text{ (195, Z. 1)},$$

und da $\triangle EDF \sim \triangle BDA$ (196),

so sind die Punkte N und O Aehnlichkeitspunkte der Dreiecke

mithin $EN : BO = DF : DA$ (A. 371), [(A. 372),

daher wegen obiger Proportion

$$DN : DO = EN : BO$$

$$DN = EN \text{ (als Radien)},$$

folglich $DO = BO = AO$.

Ein aus O mit DO als Radius beschriebener Kreis muss demnach durch die gegebenen Punkte A und B und durch den Punkt D gehen.

Nun ist aber NO die Axe des gegebenen und des zu beschreibenden Kreises, und diese Axe wird durch die die Endpunkte paralleler Halbmesser NF und AO verbindende Gerade AF in D geschnitten; es ist also der Punkt D ein Aehnlichkeitspunkt der Kreise N und O (A. 576), und zwar der innere für den Fall, wo die gegebenen Punkte ausserhalb des gegebenen Kreises liegen (Fig. 493.), der äussere für den Fall, wo sie innerhalb liegen (Fig. 494.); und da beide Kreise, N und O, den Punkt D gemeinschaftlich haben und einen zweiten Punkt nicht gemeinschaftlich haben können, weil alsdann die Axe NO durch den zum Endpunkt der gemeinschaftlichen Sehne gewordenen Punkt D ginge, was im Widerspruch steht mit 264, so müssen sich die Kreise in D berühren (236), und zwar von aussen in dem oben erwähnten ersteren Falle, von innen in dem letzteren Falle; w. z. b. w.

Anmerkung. In beiden Fallen (Fig. 493. und 494.) gibt es zwei Kreise, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten; man findet den Mittelpunkt und Halbmesser des zweiten Kreises durch eine ähnliche Construction, wie die obige; nur benutzt man den A. 655, Anmk. 2 näher bezeichneten zweiten Punkt M; der Beweis ist alsdann ähnlich dem obigen. In beiden Fällen berühren sich die Kreise von innen

657. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene (ungleiche) Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Auflösung. Man ziehe an die gegebenen Kreise A und B (Fig. 495.) nach Anleitung von A. 647 eine ihrer gemeinschaftlichen Tangenten, hier z. B. die äussere DEF, deren Berührungspunkte E und F sind; verlängere die Axe AB, bis sie die Tangente in D schneidet; verbinde diesen Durchschnittspunkt mit dem gegebenen Punkte C durch die Gerade CD; suche zu dieser Geraden und den

beiden zwischen dem Punkte D und den Berührungspunkten enthaltenen Stücken DE und DF der gemeinschaftlichen Tangente die vierte Proportionale, schneide ihre Länge auf CD von D aus ab, sie sei gleich DG, und beschreibe nach Anleitung von A. 656 einen Kreis K, der durch diesen zuletzt erhaltenen Punkt G und durch den gegebenen Punkt geht und einen der gegebenen Kreise, es sei Kreis A, berührt, so ist Kreis K der verlangte.

Beweis. Man ziehe die Radien AE und BF nach den Berührungspunkten der gemeinschaftlichen Tangente, so ist

$$\left.\begin{array}{l} AE \perp DF \\ BF \perp DF \end{array}\right\} (243),$$

folglich $AE \parallel BF$ (26, Z.).

Mithin ist der Punkt D der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise A und B (A. 576).

Zieht man nun durch den Berührungspunkt H der Kreise A und K die Aehnlichkeitslinie DH der Kreise A und B, welche, da sie in unserer Figur den Kreis A in L und H schneidet, auch Kreis B schneiden muss (A. 576, Z. 4), und zwar in J und M; zieht man ferner nach den gleichgelegenen Durchschnittspunkten L und J jener Aehnlichkeitslinie durch die Peripherieen die Radien AL und BJ; verbindet endlich den gegebenen Punkt C mit dem Berührungspunkte H der Kreise A und K durch die Gerade CH und den Punkt G mit dem Punkte J durch die Gerade GJ, so ist

$$AL \parallel BJ \text{ (A. 574)},$$

folglich $\left.\begin{array}{l} DL : AD = DJ : BD \\ DE : AD = DF : BD \end{array}\right\}$ (195),

mithin $DL : DE = DJ : DF$,

aber $DL : DE = DE : DH$ (259, Z. 1),

folglich $DJ : DF = DE : DH$

$DG : DF = DE : CD$ (Constr.),

mithin $DJ : DG = CD : DH$ (150)

$\angle GDJ = \angle CDH$,

folglich $\triangle DJG \sim \triangle DCH$ (198),

daher $\angle DJG = \angle DCH$,

und $\angle DGJ = \angle DHC$,

aber $\left.\begin{array}{l} \angle DCH + \angle HCG = 2R \\ \text{und } \angle DHC + \angle CHJ = 2R \end{array}\right\}$ (20),

folglich auch $\angle DJG$ oder $\angle HJG + \angle HCG = 2R$

und $\angle DGJ$ oder $\angle CGJ + \angle CHJ = 2R$.

Da nun Kreis K durch die Punkte H, C und G geht (Constr.), so muss er auch durch den Punkt J gehen (241, Z. 4). Zieht man nun den Radius KJ, so ist

$$\begin{aligned} \angle BJM &= \angle ALM \ (25) \\ &= \angle AHL \ (51) \\ &= \angle KHJ \ (22) \\ &= \angle KJH \ (51) \end{aligned}$$

$$\angle BJM + \angle BJD = 2R \ (20), \text{ daher auch}$$
$$\angle KJH + \angle BJD = 2R.$$

Folglich ist KJB eine einzige Gerade (21), und zwar ist diese Gerade die Axe der Kreise B und K, und da beide Kreise den Punkt J gemeinschaftlich haben, einen zweiten Punkt aber nicht gemeinschaftlich haben können, weil alsdann die Axe durch den einen nun zum Endpunkte der gemeinschaftlichen Sehne gewordenen Punkt J ginge, was im Widerspruch mit 264 stände, so müssen die Kreise B und K sich in J berühren (236); mithin ist Kreis K der verlangte; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Um die vierte Proportionale zu CD, DE, DF zu finden, hat man nur nöthig, auf CD von D aus ein Stück = DF aufzutragen und durch den Endpunkt dieses Stückes mit CE eine Parallele zu ziehen, so ist das durch dieselbe auf DF von D aus abgeschnittene Stück die gesuchte vierte Proportionale, was aus 195 folgt; diesem Stücke hat man also in der obigen Auflösung DG gleich zu machen.

Anmerkung 2. Soll der gesuchte Kreis die gegebenen gleichartig, d. h. beide zugleich von aussen oder beide von innen berühren, so muss man zu der Auflösung den äussern Aehnlichkeitspunkt der beiden gegebenen Kreise nehmen; für ungleichartige Berührungen dagegen den innern. Es lassen sich in Allem vier Kreise beschreiben, die das in unserer Aufgabe Verlangte leisten.

658. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Auflösung. Man ziehe mit jeder der gegebenen Geraden AB und CD (Fig. 496.) auf jeder Seite in einer dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleichen Entfernung eine Parallele, nämlich EF und HJ ∥ AB, GF und KJ ∥ CD; construire alsdann nach Anleitung von A. 653 zwei Kreise O und P, welche beide durch den Mittelpunkt M des gegebenen geben, und von denen der eine, O, zwei solche, EF und GF, von den vier Hülfslinien berührt, welche beide auf den von einander abgekehrten, der andere, P, zwei solche, HJ und KJ, welche beide auf den einander zugekehrten Seiten der mit ihnen parallelen gegebenen Geraden liegen, und beschreibe hierauf mit Kreis O einen concentrischen Kreis, dessen Radius gleich

ist dem Unterschiede der Radien des genannten und des gegebenen Kreises, und mit Kreis P gleichfalls einen concentrischen Kreis, dessen Radius gleich ist der Summe der Radien des Kreises P und des gegebenen; so sind die zwei zuletzt beschriebenen Kreise solche, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Beweis. Man ziehe in dem durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises gehenden und die Hülfslinien EF nnd GF berührenden Kreise O die Radien OE und OG nach den Berührungspunkten und den Radius OM nach dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises, so ist EF ∥ AB (Constr.)

OE ⊥ EF (243),

folglich OL ⊥ AB (25, Z.)

EL = dem Radius des gegebenen Kreises (Constr.),

daher OE—EL=OL = dem Unterschiede der Radien des Kreises O und des gegebenen; der mit diesem Unterschiede oder mit OL als Radius concentrisch mit Kreis O beschriebene Kreis berührt mithin die gegebene Gerade AB in L (242) und aus ähnlichen Gründen auch die gegebene CD in N. Nun ist auch OS ein Radius dieses Kreises, indem ihn die Gerade OM in S schneidet, also

OS = OL

= OE — EL

= OM — EL

OS = OM — MS,

folglich MS = EL = dem Radius des gegebenen Kreises,

und daher OM = OS + MS, d. h. die Summe der Radien des mit Kreis O concentrisch beschriebenen Kreises nnd des gegebenen ist gleich der Entfernung ihrer Mittelpunkte; mithin berühren sich beide Kreise, und zwar von aussen (263, Anmk.); der erstere ist demnach ein Kreis, welcher den Anforderungen der Aufgabe genügt.

Man ziehe ferner in dem durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises gehenden und die Hülfslinien HJ und KJ berührenden Kreise P die Radien PH und PK nach den Berührungspunkten nnd den Radius PM nach dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises, so ist HJ ∥ AB (Constr.)

PH ⊥ HJ (243),

folglich die bis AB verlängerte PH, d. i. PQ ⊥ AB (25, Z.)

HQ = dem Radius des gegebenen Kreises (Constr.),

daher PQ = PH + HQ = der Summe der Radien des

Kreises P und des gegebenen; der mit dieser Summe oder mit PQ als Radius concentrisch mit Kreis P beschriebene Kreis berührt mithin die gegebene Gerade AB in Q (242) und aus ähnlichen Gründen auch die gegebene Gerade CD in R. Verlängert man nun PM bis zum Durchschnitt U mit der Peripherie dieses Kreises, so ist auch PU ein Radius desselben und

$$PU = PQ$$
$$= PH + HQ$$
$$PU = PM + MU,$$

folglich $PH + HQ = PM + MU$

$PH = PM$ (als Radien des Kreises P),

mithin $MU = HQ =$ dem Radius des gegebenen Kreises,

daher $PM = PU - MU$, d. h. der Unterschied der Radien des mit Kreis P concentrisch beschriebenen Kreises und des gegebenen ist gleich der Entfernung ihrer Mittelpunkte; mithin berühren sich beide Kreise, und zwar von innen (263, Anmk.); der erstere ist demnach ein Kreis, welcher den Anforderungen der Aufgabe genügt; w. z. b. w.

659. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Auflösung. Man ziehe im gegebenen Kreise K (Fig. 497.) denjenigen Durchmesser DE, welcher (nöthigenfalls verlängert) die gegebene Gerade AB in F unter rechten Winkeln schneidet; verbinde, jenachdem die Berührung zwischen den beiden Kreisen eine äussere oder innere sein soll, den der gegebenen Geraden entfernteren, D, oder näheren Scheitel, E, des Durchmessers DE mit dem gegebenen Punkte C durch die Gerade CD oder CE; schneide vom Scheitel des Durchmessers aus auf dieser (nöthigenfalls verlängerten) Geraden CD selbst, wenn die Kreise sich von aussen berühren sollen, hingegen auf der Verlängerung von CE, wenn sie sich von innen berühren sollen, ein Stück DG oder EH ab, welches gleich ist der vierten Proportionale (siehe A. 657, Anmk. 1) zu der zuletzt genannten Linie, dem Durchmesser und der Entfernung seines (zur Auflösung benutzten) Scheitels von der gegebenen Geraden, also bei äusserer Berührung das Stück DG gleich der vierten Proportionale zu CD, DE, DF; bei innerer Berührung das Stück EH gleich der vierten Proportionale zu CE, DE, EF; und beschreibe hierauf nach Anleitung von A. 654 zwei Kreise, M und N, welche die gegebene

Gerade berühren und durch den gegebenen Punkt gehen, und von denen der eine, M, ausserdem noch durch den Endpunkt G der einen, der andere, N, durch den Endpunkt H der andern vierten Proportionale geht, so sind diese beiden Kreise zwei den Anforderungen der Aufgabe genügende.

Beweis. Man ziehe nach dem Punkte L, in welchem Kreis M die gegebene AB berührt (Constr.), den Radius ML; verbinde L mit den Endpunkten von DG durch die Geraden GL und DL, und den Durchschnittspunkt P der letzteren durch die Peripherie des gegebenen Kreises mit dem gegebenen Punkte und dem Durchmesserscheitel E durch die Geraden CP und EP, so ist

$\angle EPD = R$ (246)

$\angle DFL = R$ (Constr.),

also $\angle EPD = \angle DFL$

$\angle PDE = \angle FDL$,

mithin auch $\angle PED = \angle DLF$ (38, Z. 2),

folglich $PD : DE = DF : DL$ (196),

aber $CD : DE = DF : DG$ (Constr.),

daher $PD : CD = DG : DL$ (150),

und da $\angle PDC = \angle GDL$,

so ist $\angle PCD = \angle GLD$ } (198)

und $\angle CPD = \angle DGL$ }

$\angle PCD + \angle PCG = 2R$ } (20),

$\angle CPD + \angle CPL = 2R$ }

mithin $\angle GLD$ oder $\angle GLP + \angle PCG = 2R$

und $\angle DGL$ oder $\angle CGL + \angle CPL = 2R$.

Die vier Punkte C, G, L und P haben also eine solche Lage, dass sich eine Kreislinie beschreiben lässt, welche durch sie hindurchgeht (244, Z. 4); da aber Kreis M durch die Punkte C, G und L geht (Constr.), so muss er auch durch P gehen und hat demnach diesen Punkt mit dem gegebenen Kreise gemeinschaftlich. Zieht man nun die Radien MP und KP, so ist

$ML \perp AB$ (243)

$DF \perp AB$ (Constr.),

daher $ML \parallel DF$ (26, Z.),

folglich $\angle MLP = \angle KDP$ (25)

$\angle MLP = \angle MPL$ } (51),

$\angle KDP = \angle KPD$ }

mithin $\angle MPL = \angle KPD$

$\angle MPL + \angle MPD = 2R$ (20),

folglich $\angle KPD + \angle MPD = 2R$,

daher KP und PM eine einzige Gerade (21), und es ist $KM = MP \perp PK$, d. h. die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise M und K ist gleich der Summe ihrer Radien, mithin berühren sich die Kreise von aussen (263, Anmk.), und daher entspricht Kreis M den Anforderungen der Aufgabe.

Man ziehe ferner den Radius NO nach dem Punkte, in welchem Kreis N die gegebene AB berührt (Constr.); verbinde eben diesen Punkt mit dem Durchmesserscheitel E durch die Gerade OE; verlängere OE bis zum zweiten Durchschnitt R mit der Peripherie des gegebenen Kreises und ziehe RD, so ist

$\angle ERD = R$ (243)

$\angle OFE = R$ (Constr.),

also $\angle ERD = \angle OFE$

$\angle RED = \angle OEF$ (22),

daher auch $\angle EDR = \angle FOE$ (38, Z. 2),

folglich $RE : DE = EF : OE$ (198),

aber $CE : DE = EF : HE$ (Constr.),

mithin $RE : CE = HE : OE$ (150).

Es haben also die vier Punkte C, O, H und R eine solche Lage, dass sich eine Kreislinie beschreiben lässt, welche durch sie hindurchgeht (251, Z. 2); da nun Kreis N durch die Punkte C, O und H geht (Constr.), so muss er auch durch R gehen und hat demnach diesen Punkt mit dem gegebenen Kreise gemeinschaftlich. Zieht man nun die Radien NR und KR, so ist

$NO \perp AB$ (243)

$KE \perp AB$ (Constr.),

daher $NO \parallel KE$ (26, Z.),

folglich $\angle NOR = \angle KER$ (25),

aber $\angle NOR = \angle NRO$
und $\angle KER = \angle KRE$ } (51),

mithin $\angle NRO = \angle KRE$.

Da nun beide Winkel ihren Scheitelpunkt R und einen Schenkel RO gemeinschaftlich haben und beide auf derselben Seite dieses Schenkels liegen, da ferner die beiden andern Schenkel nach einerlei Richtung vom Scheitel auslaufen, so müssen die letzteren offenbar zusammenfallen; NR und KR bilden also eine einzige Gerade, und

es ist NK = NR — KR, d. h. die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise N und K ist gleich dem Unterschiede ihrer Radien; mithin berühren sich die Kreise von innen (263, Anmk.); Kreis N entspricht demnach den Bedingungen der Aufgabe; w. z. b. w.

Anmerkung. Nachdem bewiesen ist, dass die vier Punkte C, O, H und R eine solche Lage haben, dass sich eine Kreislinie beschreiben lasst, welche durch sie hindurchgeht, so bedarf die Behauptung, dass Kreis N, da er durch drei jener Punkte gehe, auch durch den vierten R gehen müsse, streng genommen noch eines Beweises; derselbe ist jedoch sehr leicht und mag hier sowohl für obige, wie für frühere und spätere Aufgaben seinen Platz finden. Angenommen Kreis N ginge nicht durch den Punkt R, sondern durch einen beliebigen andern D, so wäre COND ein Kreisviereck, daher die Summe der gegenüberliegenden Winkel bei O und D gleich zwei Rechten (275). Da nun die Scheitelwinkel bei E einander gleich (22) und nach obigem Beweise ER : CE = HE : OE,

so ist $\angle ERC = \angle EHO$ }
und $\angle ERH = \angle OCH$ } (198),
also $\angle HRC = \angle EHO + \angle OCH$,
folglich $\angle HRC + \angle HOC = 2R$ (38),
mitbin wäre $\angle HRC = \angle HDC$, was aber nicht möglich ist, da $\angle HRC$ kleiner sein muss als $\angle HDC$ (38, Z. 1); die Kreislinie kann mithin nicht durch einen andern Punkt gehen, wenn sie nicht gleichzeitig durch den Punkt R geht.

660. Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade und zwei gegebene (ungleiche) Kreise berührt.

Auflösung. Man ziehe mit der gegebenen Geraden AB (Fig. 498.) eine Parallele CD, welche von ihr um den Halbmesser des kleineren Kreises K entfernt ist; beschreibe concentrisch mit dem grösseren Kreise einen Kreis, dessen Halbmesser OG gleich dem Unterschiede der Radien der gegebenen Kreise ist; construire hierauf nach Anleitung von A. 659 einen zweiten Kreis, welcher den ersten Hülfskreis und die Parallele CD berührt, ersteren in G, letztere in H, und durch den Mittelpunkt K des kleinern der gegebenen Kreise geht; endlich beschreibe man concentrisch mit dem zweiten Hülfskreise einen Kreis, dessen Halbmesser gleich ist dem Unterschiede der Radien des eben genannten und des kleinern der gegebenen Kreise, so ist der zuletzt construirte Kreis ein den Bedingungen der Aufgabe entsprechender.

Beweis. Man ziehe die Axen MO, MK und im zweiten Hülfskreise den Radius MH nach dem Punkte, in welchem er die Parallele CD berührt (Constr.); bezeichnet man ferner die Durchschnittspunkte jener Axen durch die Peripherieen der gegebenen

Kreise mit L und F, so ist OL ein Radius des grössern, KF ein Radius des kleinern und:

$$OL - KF = OG \text{ (Constr.)}$$
$$= OL - GL$$

folglich $GL = KF.$

Da $MH \perp CD$ (243) und AB in E schneidet, so ist EH = der Entfernung des Punktes E von CD (29, Zus. 1) und da CD $\parallel$ AB (Constr.), so ist EH = der Entfernung zwischen AB und CD (31) = KF (Constr.), mithin

$GL = KF = EH$

aber $MG = MK = MH$ (als Radien desselben Kreises)

folglich $MG - GL = MK - KF = MH - EH$

oder $ML = MF = ME.$

Diese drei Geraden sind demnach Radien des zuletzt beschriebenen Kreises.

Nun ist $MO = OL + ML$, d. h. die Entfernung der Mittelpunkte des eben genannten und des grössern gegebenen Kreises ist gleich der Summe ihrer Radien; ebenso ist $MK = KF + MF$, d. h. die Entfernung der Mittelpunkte des ersteren Kreises und des kleineren gegebenen gleich der Summe ihrer Radien; folglich werden die gegebenen Kreise durch jenen gleichartig, d. h. beide zugleich und zwar von aussen berührt (263, Anmk.). Da ferner

$AB \parallel CD$ (Constr.)

$MH \perp CD$ (243),

so ist $ME \perp AB$ (25, Zus.).

Mithin berührt der in Rede stehende Kreis auch die gegebene Gerade AB (242); derselbe entspricht also den Bedingungen der Aufgabe und ist somit der verlangte; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Zieht man die Parallele auf der den gegebenen Kreisen abgekehrten Seite der gegebenen Geraden und beschreibt den ersten Hülfskreis (den mit dem grösseren gegebenen concentrischen) mit einem Halbmesser gleich dem Unterschiede der Radien der gegebenen Kreise, den zweiten Hülfskreis (welcher durch den Mittelpunkt des kleineren gegebenen geht) aber so, dass er den ersten von aussen berührt; wenn man also die Construction ganz so ausführt, wie sie in obiger Auflösung angegeben ist, und wie sie Fig. 498 zeigt, so berührt der in der Aufgabe verlangte Kreis die gegebenen gleichartig von aussen .... A.

Beschreibt man dagegen den ersten Hülfskreis mit einem Halbmesser gleich der Summe der Radien der gegebenen Kreise und den zweiten Hülfskreis so, dass er den ersten von innen berührt, so ist die Berührung des gesuchten mit

den gegebenen Kreisen ungleichartig, und zwar wird der grössere von innen, der kleinere von aussen berührt . . . . B.

Zieht man ferner die Parallele auf der den gegebenen Kreisen zugekehrten Seite der gegebenen Geraden und beschreibt den ersten Hülfskreis mit einem Halbmesser gleich dem Unterschiede der Radien der gegebenen Kreise, den zweiten Hulfskreis jedoch so, dass er den ersten von innen beruhrt, so ist die Berührung des gesuchten mit den gegebenen Kreisen gleichartig von innen . . . . C.

Beschreibt man dagegen den ersten Hülfskreis mit einem Halbmesser gleich der Summe der Radien der gegebenen Kreise, den zweiten Hulfskreis jedoch so, dass er den ersten von aussen berührt, so ist die Berührung des gesuchten mit den gegebenen Kreisen ungleichartig, und zwar wird der grössere von aussen, der kleinere von innen berührt . . . D.

Aus Vorstehendem ergibt sich demnach, dass es gleichgültig ist, auf welcher Seite der gegebenen Geraden man die Parallele zieht.

Im Ganzen lassen sich vier Kreise beschreiben, welche den Anforderungen der Aufgabe Genüge leisten. Die Beweise für alle vier Falle sind einander ganz ähnlich.

Anmerkung 2. Die Auflösung kann nun auch derartig geschehen, dass die Entfernung der Parallele von der gegebenen Geraden nicht wie oben gleich dem Halbmesser des kleineren, sondern gleich dem des grosseren der gegebenen Kreise genommen wird; alsdann ist der erste Hülfskreis concentrisch, nicht mit dem grösseren, sondern mit dem kleineren, und der zweite Hulfskreis so zu beschreiben, dass er durch den Mittelpunkt des grösseren der gegebenen Kreise geht. Die vier Kreise, die man auf diese Weise erhält, sind aber keineswegs etwa vier andere, sondern, wie man sich leicht überzeugen kann, ganz dieselben der ersten Auflösung; und zwar wird der in Anmerkung 1 unter A naher bezeichnete Kreis erhalten:

wenn man die Parallele auf der den gegebenen Kreisen abgekehrten Seite der gegebenen Geraden zieht und den ersten Hulfskreis mit einem Halbmesser gleich dem Unterschiede der Radien der gegebenen Kreise, den zweiten Hülfskreis aber so beschreibt, dass er den ersten von innen berührt.

Den in Anmerkung 1 unter B näher bezeichneten Kreis erhalt man:

wenn man die Parallele auf der den gegebenen Kreisen zugekehrten Seite der gegebenen Geraden zieht und den ersten Hülfskreis mit einem Halbmesser gleich der Summe der Radien der gegebenen Kreise, den zweiten Hülfskreis aber so beschreibt, dass er den ersten von aussen berührt.

Den in Anmerkung 1 unter C naher bezeichneten Kreis erhalt man:

wenn man die Parallele auf der den gegebenen Kreisen zugekehrten Seite der gegebenen Geraden zieht und den ersten Hülfskreis mit einem Halbmesser gleich dem Unterschiede der Radien der gegebenen Kreise, den zweiten Hülfskreis aber so beschreibt, dass er den ersten von aussen berührt.

Den in Anmerkung 1 unter D näher bezeichneten Kreis endlich erhält man:

wenn man die Parallele auf der den gegebenen Kreisen abgekehrten Seite der gegebenen Geraden zieht und den ersten Hülfskreis mit einem Halbmesser gleich der Summe der Radien der gegebenen Kreise, den zweiten Hülfskreis aber so beschreibt, dass er den ersten von innen berührt.

661. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene (ungleiche) Kreise berührt.

Auflösung. Man beschreibe mit dem grössten M_3 (Fig. 499.) und dem mittleren M_2 der gegebenen Kreise zwei andere concentrisch, deren Halbmesser einzeln gleich dem Ueberschusse des Halbmessers jedes der genannten Kreise selbst über den des dritten (kleinsten) M_1; construire hierauf nach Anleitung von A. 657 einen dritten Hülfskreis, welcher die beiden ersten berührt und durch den Mittelpunkt des kleinsten der gegebenen Kreise geht, und beschreibe nun concentrisch mit dem dritten Hülfskreise einen Kreis M, dessen Radius gleich ist dem Unterschiede der Radien des dritten Hülfskreises und des kleinsten der gegebenen, so ist dieser Kreis M ein solcher, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Beweis. Zieht man die Axen MM_1, MM_2, MM_3, bezeichnet die Punkte, in welchen sie die Peripherieen der gegebenen Kreise schneiden, beziehungsweise mit A, B, C und die Punkte, in welchen MM_2 und MM_3 die Peripherieen der zwei ersten Hülfskreise schneiden, beziehungsweise mit D und E, so ist:

MM_1 = dem Radius des dritten Hülfskreises (Constr.)

M_1A = dem Radius des kleinsten gegebenen Kreises (Constr.)

mithin

$MM_1 - M_1A$ = dem Radius des zuletzt beschriebenen Kreises M

$MM_1 - M_1A = MA$, [(Constr.)

folglich MA ein Radius des Kreises M.

Da nun $MM_1 = MA + M_1A$, d. h. da die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise M und M_1 gleich der Summe ihrer Radien ist, so berühren sich die Kreise von aussen (263, Anmk.). Ferner ist $M_2D = M_2B - M_1A$ (Constr.)

$M_2D = M_2B - BD$,

folglich $BD = M_1A$ = dem Radius des kleinsten gegebenen Kreises

MD = dem Radius des dritten Hülfskreises (Constr.), daher

$MD - BD$ = dem Radius des Kreises M (Constr.)

$= MB$.

Da nun $MM_2 = MB + M_2B$, d. h. da die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise M nnd M_2 gleich ist der Summe ihrer Radien, so berühren sich die Kreise von aussen (263, Anmk.).

Auf ganz ähnliche Weise zeigt man, dass Kreis M auch den grössten gegebenen Kreis M_3 von aussen berührt; Kreis M ist also

ein solcher, welcher den Bedingungen der Aufgabe entspricht; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Liegen die drei gegebenen Kreise ganz aussereinander, so lassen sich im Ganzen acht den Anforderungen der Aufgabe entsprechende Kreise beschreiben:

1) Beschreibt man den ersten Hülfskreis mit einem Halbmesser gleich dem Unterschiede der Radien von Kreis M_1 und M_2; den zweiten Hülfskreis mit einem Halbmesser gleich dem Unterschiede der Radien von Kreis M_1 und M_3; den dritten Hülfskreis so, dass er die beiden ersten von ausserhalb berührt; so berührt Kreis M die gegebenen gleichartig von aussen.

2) Beschreibt man die beiden ersten Hülfskreise wie in 1; den dritten aber so, dass er jene von innen berührt, so berührt Kreis M die gegebenen gleichartig von innen.

3) Beschreibt man den ersten Hülfskreis mit einem Halbmesser gleich der Summe der Radien von Kreis M_1 und M_2; den zweiten mit einem Halbmesser gleich der Summe der Radien von Kreis M_1 und M_3; den dritten so, dass er die beiden ersten von aussen berührt, so berührt Kreis M die gegebenen ungleichartig, und zwar M_1 von innen, M_2 und M_3 von aussen.

4) Beschreibt man die beiden ersten Hülfskreise wie in 3, den dritten aber so, dass er jene von innen berührt, so berührt Kreis M die gegebenen ungleichartig, und zwar M_1 von aussen, M_2 und M_3 von innen.

5) Beschreibt man den ersten Hülfskreis mit einem Halbmesser gleich der Summe der Radien von M_1 und M_2 den zweiten mit einem Halbmesser gleich dem Unterschiede der Radien von M_1 und M_3; den dritten so, dass er den ersten von innen und den zweiten von aussen berührt, so berührt Kreis M die gegebenen ungleichartig, und zwar M_2 von innen, M_1 und M_3 von aussen.

6) Beschreibt man die beiden ersten Hülfskreise wie in 5, den dritten aber so, dass er den ersten von aussen und den zweiten von innen berührt, so berührt Kreis M die gegebenen ungleichartig, und zwar M_2 von aussen, M_1 und M_3 von innen.

7) Beschreibt man den ersten Hülfskreis mit einem Halbmesser gleich dem Unterschiede der Radien von M_1 und M_2, den zweiten mit einem Halbmesser gleich der Summe der Radien von M_1 und M_3, den dritten so, dass er den ersten von aussen und den zweiten von innen berührt, so berührt Kreis M die gegebenen ungleichartig, und zwar M_3 von innen, M_1 und M_2 von aussen.

8) Beschreibt man die beiden ersten Hülfskreise wie in 7, den dritten so, dass er den ersten von innen und den zweiten von aussen berührt, so berührt Kreis M die gegebenen ungleichartig, und zwar M_3 von aussen, M_1 und M_2 von innen.

Die Beweise für die Fälle von 2 — 8 sind dem oben geführten des ersten Falles ganz ähnlich.

Anmerkung 2. Es ist gleichgültig, welchen der drei gegebenen Kreise man benutzt, um durch seinen Mittelpunkt die Kreislinie des dritten Hülfskreises zu ziehen; selbstredend werden die beiden ersten Hülfskreise concentrisch mit den

beiden gegebenen Kreisen beschrieben, durch deren Mittelpunkt der dritte Hülfskreis nicht geht. Durch solche Veränderungen in der Auflösung erhält man aber nicht neue, sondern stets einen oder den andern der in Anmerkung 1 naher bezeichneten Kreise.

Anmerkung 3. Es lassen sich nicht in allen Fällen acht Kreise beschreiben; ihre Zahl richtet sich nach der gegenseitigen Lage der gegebenen Kreise. Wenn z. B. ein jeder derselben die beiden andern von innen berührt, so ist nur ein einziger Kreis möglich; wenn jeder die beiden andern von aussen berührt, so sind nur zwei Kreise möglich; wenn sich zwei schneiden und der dritte ganz ausserhalb derselben liegt, ohne ihnen zu begegnen, so lassen sich im Ganzen fünf Kreise beschreiben, u. s. w.

Anmerkung 4. Eine andere Lösung unserer Aufgabe, welche vor der hier mitgetheilten den Vorzug hat, dass sie unabhängig von allen früheren verwandten Aufgaben ist, ergibt sich unmittelbar aus den früheren Lehrsätzen A. 616 und 616b; denn auf Grund dieser hat man nur nöthig, den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der drei Potenzlinien der gegebenen Kreise mit den Durchschnittspunkten ihrer äusseren und inneren Aehnlichkeitspolaren durch gerade Linien zu verbinden. Von den Punkten, in denen diese Geraden die Peripherieen schneiden, sind je drei entsprechende die Berührungspunkte eines Kreises, welcher den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Anmerkung 5. Die beiden bekannten Aufgaben, auf denen unmittelbar die Construction eines Kreises um und in ein gegebenes Dreieck beruht, nebst den acht in den vorhergehenden Nummern 653, 654, 656—661 mitgetheilten, machen den Inhalt des sogenannten Apollonianischen Problems von den Berührungen aus. Apollonius behandelte dieses Problem in einer besonderen, aus zwei Büchern bestehenden Schrift, welche den Titel: περὶ ἐπαφῶν führte, die aber gleich so manchen andern schätzenswerthen Arbeiten desselben, so wie auderer ausgezeichneter griechischer Mathematiker verloren gegangen ist. Die Hülfssätze zu den einzelnen Fällen des Problems, die uns Pappus im siebenten Buche seiner mathematischen Sammlungen aufbewahrt hat, sind auch darum sehr schätzenswerth für uns, weil sie näheres Licht über die Behandlungsweise des Apollonius verbreiten. Nach ihnen darf man mit Grund vermuthen, dass die von uns im Vorhergehenden gegebenen Auflösungen in der Hauptsache mit den von Apollonius gegebenen übereinstimmen.

662. Wenn drei Punkte gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, dessen Peripherie von jedem derselben eine vorgeschriebene Entfernung hat.

Auflösung. Man beschreibe aus jedem der gegebenen Punkte als Mittelpunkt mit der für ihn von der Peripherie des gesuchten Kreises vorgeschriebenen Entfernung als Radius einen Kreis und construire nun nach Anleitung von A. 661 einen Kreis, welcher jene drei berührt, so ist dies der verlangte.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction in Verbindung mit 263, Anmk.

Anmerkung. Diese Aufgabe kann als eine Verallgemeinerung der vorhergehenden betrachtet werden.

663. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen der Grösse und Lage nach gegebenen Kreis so schneidet, dass die gemeinschaftliche Sehne eine vorgeschriebene Länge hat.

Auflösung. Man bestimme auf der Peripherie des gegebenen Kreises K (Fig. 500.) nach Anleitung von A. 655 den Punkt E, für welchen GH ∥ AB, der Verbindungslinie der gegebenen Punkte; ziehe durch jenen Punkt eine Tangente an den gegebenen Kreis und verlängere sie und nöthigenfalls auch AB, bis sie sich in F schneiden; ziehe hierauf nach Anleitung von A. 646 von F aus eine Gerade, welche den gegebenen Kreis für die vorgeschriebene Länge CD schneidet, und beschreibe endlich einen Kreis, welcher durch die drei Punkte A, B und C geht, indem man auf AB und BC in ihren Halbirungspunkten Senkrechte errichtet und deren Durchschnittspunkt als Mittelpunkt und seine Entfernung von einem der drei Punkte als Halbmesser nimmt, so ist der so erhaltene Kreis M der verlangte.

Beweis. Man ziehe AC und BD, so ist

$$GH \parallel BF \text{ (Constr.)}$$

mithin $\angle EBF = \angle EHG$ (25)

$\angle EHG = \angle AEF$ (247)

folglich $\angle EBF = AEF$

$\angle EFB = \angle EFA$

also auch $\angle BEF = \angle EAF$ (38, Z. 2)

daher $BF : EF = EF : AF$ (196)

aber $DF : EF = EF : CF$ (259, Zus. 1)

folglich $BF : DF = CF : AF$ (150 und 152)

$\angle BFD = \angle AFC$

mithin $\angle DBF$ oder $\angle DBA = \angle ACF$
und $\angle BDF$ oder $\angle BDC = \angle FAC$ } (198)

aber $\angle ACF + \angle ACD = 2R$
und $\angle FAC + \angle BAC = 2R$ } (20), folglich auch

$\angle DBA + \angle ACD = 2R$

und $\angle BDC + \angle BAC = 2R$,

mithin ABCD ein Kreisviereck (244, Z. 4).

Da nun Kreis M durch die Punkte A, B und C geht (Constr. und A. 21 und A. 21, Zus.), so muss er auch durch den Punkt D

gehen und entspricht demnach den Anforderungen der Aufgabe; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Da man vom Punkte F aus zwei Gerade nach einem Kreise ziehen kann, welche einander gleich sind (250, Zus. 5) und gleiche Entfernung vom Mittelpunkte haben (250); so lassen sich auch zwei Gerade ziehen, welche den gegebenen Kreis für die vorgeschriebene Länge schneiden und demzufolge zwei Kreise beschreiben, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Anmerkung 2. Zieht man von F aus die zweite Tangente FL = EF an den gegebenen Kreis, verbindet den Berührungspunkt L mit den gegebenen, verlängert diese Verbindenden, bis sie die Peripherie zum zweiten Male in D und P schneiden und zieht DP, so ist:

	BF : EF = EF : AF
	EF = FL
also	BF : LF = LF : AF
	$\angle$ BFL = $\angle$ AFL
folglich	$\angle$ BLF = $\angle$ FAL (198)
	$\angle$ BLF + $\angle$ PLF = 2R } (20)
	$\angle$ FAL + $\angle$ BAL = 2R } (20)
mithin	$\angle$ PLF = $\angle$ BAL
	$\angle$ PLF = $\angle$ PDL (247)
also	$\angle$ BAL = $\angle$ PDL
folglich	DP ∥ AB (26).

Wie E der eine, so ist also L der andere Punkt (A. 655, Anmk. 2) auf der Peripherie des gegebenen Kreises, durch welchen zwei Sehnen AD und BP so gezogen sind, dass sie einzeln durch die gegebenen Punkte gehen, und dass die ihre nicht gemeinschaftlichen Endpunkte verbindende Gerade parallel ist der durch die beiden gegebenen Punkte bestimmten Geraden AB. Die durch den Punkt L an den gegebenen Kreis gezogene Tangente schneidet demnach die verlängerte AB in demselben Punkte F, wie die Tangente EF, und es ergibt sich hieraus, dass, wenn man anstatt des Punktes E den Punkt L zur Construction benutzt, man nicht zwei neue, sondern dieselben zwei Kreise erhält, wie in obiger Auflösung.

664. Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt eine Sehne so zu ziehen, dass die beiden Stücke, in welche sie in diesem Punkte getheilt wird, einen vorgeschriebenen Längenunterschied haben.

Auflösung. Man ziehe durch den gegebenen Punkt A (Fig. 501.) den Durchmesser BAH; schneide vom Mittelpunkte M aus das Stück MC = AM ab; beschreibe aus A als Mittelpunkt mit dem vorgeschriebenen Längenunterschied als Radius einen Kreis; ziehe an denselben vom Punkte C aus eine Tangente CG; verbinde den Mittelpunkt des Hülfskreises mit dem Berührungspunkte der Tangente durch die Gerade AG und verlängere sie nach beiden

Seiten, bis sie die Peripherie des gegebenen Kreises in D und E schneidet, so ist DE die gesuchte Sehne.

Beweis. Man fälle aus dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises die Senkrechte MF auf die Sehne DE, so ist, da auch

$$CG \perp DE \text{ (243)}$$
$$MF \parallel CG \text{ (26, Zus.)}$$

folglich
$$AM : MC = AF : FG \text{ (195)}$$
$$AM = MC \text{ (Constr.)}$$

mithin
$$AF = FG \text{ (149)}$$

aber
$$EF = FD \text{ (248)}$$

daher:
$$AE = GD$$

also auch:
$$AD - AE = AD - GD$$
$$= AG$$
$$= \text{dem vorgeschriebenen Längenunterschied (Constr.)}.$$

Es haben demnach die beiden Stücke AE und AD, in welche die durch den gegebenen Punkt A gezogene Sehne DE durch diesen Punkt getheilt wird, den vorgeschriebenen Längenunterschied; folglich ist DE die verlangte Sehne; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Aus 249 folgt unmittelbar, dass sich im Ganzen zwei Sehnen ziehen lassen, welche den Anforderungen der Aufgabe entsprechen.

Anmerkung 2. Macht man AO = AB, so ist:

$$AH - AB = AH - AO$$
$$= HO.$$

Es ist aber AH die grösste und AB die kleinste Linie, welche man vom Punkte A aus nach der Peripherie des gegebenen Kreises ziehen kann (249); hieraus folgt, dass, wenn der Ueberschuss des Durchmessers über den vorgeschriebenen Längenunterschied kleiner ist, als das Doppelte der kleinsten Linie die sich vom gegebenen Punkte aus nach dem Umkreise ziehen lasst, oder, was dasselbe ist, wenn der vorgeschriebene Laugenunterschied grosser ist, als der Unterschied zwischen dem Durchmesser des Kreises und dem Doppelten der kleinsten Linie, welche man vom gegebenen Punkte aus nach dem Umkreise ziehen kann, die Lösung der Aufgabe eine Unmöglichkeit wird.

Anmerkung 3. Wenn der gegebene Punkt ausserhalb des Kreises liegt, etwa wie K, und es wäre also DE die verlangte Sehne, so würden die einzelnen Stücke, in welche sie (verlangert) der gegebene Punkt theilte, DK und EK sein; also der vorgeschriebene Längenunterschied wäre in diesem Falle: DK — EK = DE, und man hatte somit die frühere Aufgabe A. 646.

665. **Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt (A Fig. 502.) eine Sehne (DE) so zu ziehen, dass die Stücke, in welche sie in demselben getheilt wird, ein vorgeschriebenes Verhältniss zu einander haben.**

Auflösung. Man ziehe durch den gegebenen Punkt den Durchmesser BAH; nehme AM so, dass BA : AM gleich dem vorgeschriebenen Verhältnisse; suche hierauf zu AM und AH die mittlere Proportionale (Siehe A. 654, Anmk. 1) = AG; beschreibe aus A mit AG als Radius einen Kreis; verbinde dessen Durchschnittspunkte D und D_1 mit der Peripherie des gegebenen Kreises mit dem gegebenen Punkte durch die Geraden AD und AD_1 und verlängere sie bis zu ihren zweiten Durchschnitten E und E_1 mit dem Umkreise des gegebenen Kreises, so sind DE und D_1E_1 zwei Sehnen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Beweis. Es ist:

$AH : AG = AG : AM$ (Constr.)

$AG = AD$ (als Radien),

daher $AH : AD = AD : AM$

$AH : AD = AE : AB$ (251, Zus. 1),

folglich $AD : AE = AM : AB$

= das gegebene Verhältniss (Constr.);

mithin ist DE die in der Aufgabe verlangte Sehne; w. z. b. w.

Aehnlich ist der Beweis, dass auch D_1E_1 eine solche Sehne ist.

Anmerkung 1. Liegt der gegebene Punkt ausserhalb des Kreises, wie K, so ziehe man den Durchmesser KBH; nehme KM so, dass KB : KM = dem vorgeschriebenen Verhältniss; mache $KL = KL_1 = KF$ = der mittleren Proportionale zu KM und KH; so ist:

$KH : KF = KF : KM$

$KF = KL$

also $KH : KL = KL : KM$

$KH : KL = KO : KB$ (256, Zus. 1),

daher $KL : KO = KM : KB$ = das gegebene Verhältniss,

ebenso $KL_1 : KO_1 = KM : KB$.

Es ändert sich also nichts Wesentliches, wenn der gegebene Punkt ausserhalb des Kreises liegt; die Aufgabe würde alsdann lauten: Von einem ausserhalb eines Kreises gegebenen Punkte eine Schneidende so zu ziehen, dass die zwischen dem Punkte und ihren Durchschnitten mit dem Umkreise enthaltenen Stücke derselben ein vorgeschriebenes Verhältniss haben.

Anmerkung 2. Da AB die kleinste, AH die grösste Linie ist, welche man von dem gegebenen Punkte nach dem Umkreise ziehen kann (249), so folgt hieraus, dass das vorgeschriebene Verhältniss das von AB : AH nicht an Grösse überschreiten darf, damit die Aufgabe nicht unmöglich werde.

666. Wenn zwei Punkte in der Peripherie eines Kreises gegeben sind, einen dritten zu finden, dessen Entfernungen von den gegebenen ein vorgeschriebenes Verhältniss haben.

Auflösnng. Man verbinde die gegebenen Punkte A und B (Fig. 503.) durch eine Gerade; theile diese Sehne in C nach dem vorgeschriebenen Verhältnisse; verbinde diesen Theilpunkt mit dem Halbirungspunkte D eines der Sehne gehörigen Bogens ADB und verlängere diese Verbindende bis zum Durchschnitt E mit dem andern Bogen AGB, so ist der Punkt E der verlangte.

Beweis. Man ziehe AE und BE, so ist:

$$\text{arc. } AD = \text{arc. } BD \text{ (Constr.)}$$

folglich $\angle AED = \angle BED$ (245)

mithin $AE : BE = AC : BC$ (206).

Da nun AC : BC gleich dem vorgeschriebenen Verhältniss (Constr.), so ist Punkt E der verlangte; w. z. b. w.

Anmerkung. Macht man BF = AC, so ist AF = BC. also BF : AF = AC : BC. Zieht man daher DF und verlängert sie, bis sie den Umkreis in G schneidet; zieht AG und BG, so ist aus gleichen Gründen wie oben:

$$BG : AG = BF : AF$$
$$= AC : BC.$$

Der Punkt G ist mithin ein zweiter Punkt, der den Anforderungen der Aufgabe entspricht. Halbirt man ferner den Bogen AHB in H, verbindet H mit C und F und verlängert diese Verbindenden, bis sie den Umkreis in K und J schneiden, so erhält man in den Punkten K und J noch zwei den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistende Punkte; der Beweis hierfür ist dem obigen ganz ähnlich.

Es lassen sich demnach im Ganzen vier Punkte finden, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

667. Aus einem der Durchschnittspunkte zweier sich schneidenden Kreise eine Gerade so zu ziehen, dass das zwischen den Umfängen beider enthaltene Stück von vorgeschriebener Länge ist.

Auflösnng. Man beschreibe über der Centrale AB (Fig. 504.) beider Kreise als Durchmesser einen dritten; trage in diesen von einem der Endpunkte des Durchmessers die Hälfte der gegebenen Länge als Sehne, AC, ein und ziehe mit derselben durch einen der Durchschnittspunkte der gegebenen Kreise eine Parallele EDF, die man beiderseits bis zum Durchschnitt mit den Peripherieen verlängert, so ist diese Parallele EDF die verlangte Gerade.

Beweis. Man fälle $AH \perp EF$, ziehe BC und verlängere sie, bis sie EF in G schneidet, so ist:

$$\angle ACB = R \text{ (246)}$$

also $AC \perp BG$

$$EF \parallel AC \text{ (Constr.)}$$

folglich $BG \perp EF$ (25, Zus.)

$AH \perp EF$ (Constr.)

mithin $BG \parallel AH$ (26, Zus.)

folglich $GH = AC$ (56)

aber $DG = \frac{1}{2}DF$

und $DH = \frac{1}{2}DE$ (248)

also $DG + DH = \frac{1}{2}DF + \frac{1}{2}DE$

d. i. $GH = \frac{1}{2}EF$

folglich: $AC = \frac{1}{2}EF$.

Da nun AC gleich der Hälfte der gegebenen Länge (Constr.), so ist EF gleich der vorgeschriebenen Länge; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Man sieht leicht, dass sich im Ganzen vier Gerade ziehen lassen, welche den Anforderungen der Aufgabe genügen, jenachdem man den einen oder den andern Endpunkt des Durchmessers benutzt, um die Sehne gleich der Hälfte der vorgeschriebenen Länge zu ziehen, und jenachdem man diese Sehne auf der einen oder der andern Seite des Durchmessers in den Kreis einträgt.

Anmerkung 2. Da der Durchmesser die grösste Sehne ist, welche in einem Kreise gezogen werden kann (250, Zus. 1), so wird die Lösung der Aufgabe offenbar unmöglich, wenn die Hälfte der vorgeschriebenen Länge grösser ist, als der Durchmesser des Hülfskreises.

668. Ein Dreieck zu beschreiben, das einem (ABC Fig. 505.) von zwei gegebenen gleichflächig nnd dem andern (BED) ähnlich ist.

Auflösung. Man trage die beiden gegebenen Dreiecke so aneinander an, dass sie eine Ecke B gemeinschaftlich haben, und dass eine Seite BE des einen mit einer BC des andern zusammenfällt; verlängere hierauf die Seite BD, bis sie die aus C mit DE gezogene Parallele CF schneidet; verlängere nun CF bis zum Durchschnitt G mit der durch A mit BC gezogenen Parallele AG; beschreibe über der so erhaltenen Linie GF als Durchmesser einen Halbkreis; errichte auf GF in C die bis zum Durchschnitt mit der Peripherie verlängerte Senkrechte CJ; trage auf CF von C aus das Stück $CK = CJ$ auf und ziehe durch K die Gerade $KH \parallel BF$, so ist das so erhaltene $\triangle CHK$ das verlangte.

Beweis. Man ziehe BG, so ist:

$\triangle BCF \sim \triangle HCK$ (Constr., 24 und 196), mithin

$\triangle BCF : \triangle HCK = CF_q : CK_q$ (205)

und da $CK = CJ$ (Constr.)

also auch $CK_q = CJ_q$

so ist $\triangle BCF : \triangle HCK = CF_q : CJ_q$
aber $CJ_q = CF_r CG$ (Constr. nnd 252)
mithin $\triangle BCF : \triangle HCK = CF_q : CF_r CG$
$= CF : CG$ (155, Zus. 1).
Aber $\triangle BCF : \triangle BCG = CF : CG$ (200)
folglich $\triangle HCK = \triangle BCG$
$\triangle BCG = \triangle ABC$ (84)
mithin $\triangle HCK = \triangle ABC \ldots. 1.$
$\triangle HCK \sim \triangle BCF$
$\triangle BED \sim \triangle BCF$ (196)
mithin $\triangle HCK \sim \triangle BED \ldots. 2.$
Daher ist $\triangle HCK$ das verlangte; w. z. b. w.

Zusatz. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Auflösung. Man beschreibe über einer Seite des gegebenen Dreiecks ein gleichseitiges nnd construire nach Anleitung des Hauptsatzes ein Dreieck, welches dem letzteren ähnlich und dem gegebenen gleichflächig ist.

Beweis folgt unmittelbar aus dem Hauptsatze.

669. In einem gegebenen Dreiecke drei Transversalen so zu ziehen, dass sie einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben und je zwei von ihnen Winkel von vorgeschriebener Grösse bilden.

Anmerkung. Die drei gegebenen Winkel müssen natürlich immer die Bedingung erfüllen, dass ihre Summe gleich zwei Rechten ist.

Auflösnng. Man errichte auf einer Seite AB (Fig. 506.) des gegebenen Dreiecks in einem ihrer Endpunkte A eine Senkrechte; trage an diese von einem beliebigen Pnnkte H derselben aus denjenigen der drei gegebenen Winkel an, welchen die von den Endpunkten der genannten Seite auslaufenden Transversalen bilden sollen; ziehe mit dem Schenkel HJ dieses Winkels von B aus eine Parallele BK, die man bis zum Durchschnitt mit der Senkrechten verlängert und beschreibe nun um das so erhaltene Dreieck ABK einen Kreis. Zwei andere Kreise beschreibe man nm die durch ein dem obigen analoges Verfahren über den Seiten AC nnd BC zu construirende Dreiecke ACL und BCM, in denen die den genannten Seiten gegenüberliegenden Winkel ALC und BMC einzeln denjenigen der gegebenen gleich sind, welche die von den Endpnnkten der Seiten anslaufenden Transversalen bilden sollen.

Durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt D der drei Kreise ziehe man aus den Ecken des gegebenen Dreiecks drei Transversalen nach den gegenüberliegenden Seiten, so sind diese Transversalen AE, BF und CG die verlangten.

Beweis. Da der eine der beiden Durchschnittspunkte je zweier der drei beschriebenen Kreise eine Ecke des gegebenen Dreiecks (Constr.) und die von dieser Ecke auslaufende gemeinschaftliche Sehne ihre Potenzlinie ist (A. 593, Zus. 3), die drei Potenzlinien aber sich in einem Punkte schneiden (A. 594), so muss dieser letztere Durchschnittspunkt der zweite Durchschnittspunkt je zweier Kreise sein; d. h. die drei Kreise haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt D.

Nun ist $\angle ADB + \angle AKB = 2R$ (275)
$\angle ADB + \angle ADF = 2R$ (20)
mithin $\angle ADF = \angle AKB$
BK ∥ HJ (Constr.)
folglich $\angle AKB = \angle AHJ$ (25)
daher auch $\angle ADF = \angle AHJ$
= demjenigen der gegebenen Winkel, welchen die von den Ecken A und B auslaufenden Transversalen bilden sollen (Constr.). Aus ähnlichen Gründen ist auch
$\angle ADG = \angle ALC$
und $\angle BDG = \angle BMC$.

Die Transversalen AE, BF und CG schneiden sich also in einem Punkte, und je zwei von ihnen bilden einen Winkel von vorgeschriebener Grösse, mithin sind dieselben die in der Aufgabe verlangten; w. z. b. w.

670. Ein Dreieck zu construiren, das einem gegebenen ähnlich ist, und dessen Seiten (nöthigenfalls verlängert) durch drei gegebene (nicht in gerader Linie liegende) Punkte gehen.

Auflösung. Man verbinde die drei gegebenen Punkte E, F und G (Fig. 506.) zu einem Dreieck; suche in diesem nach Anleitung von A. 669 den Punkt D, in welchem sich drei Transversalen unter den Winkeln des gegebenen Dreiecks, dem das gesuchte ähnlich sein soll, schneiden; ziehe durch einen der gegebenen Punkte, F, eine beliebige Gerade; trage an zwei beliebigen Punkten derselben, R und O, zwei Winkel an, von denen jeder einem der drei Winkel, unter denen sich die Transversalen schneiden, gleich ist, also z. B. $\angle WRF = \angle CDF$ und $\angle SOF = BDE$;

ziehe nun durch G mit SO und durch E mit RW zwei Parallelen und verlängere sie bis sie sich sowohl, als auch die Gerade RO schneiden, so ist das so erhaltene Dreieck ENP das verlangte.

Beweis. Es ist $\angle NPE = \angle ROS$ (25)
$= \angle BDE$ (Constr.),
$\angle ENP = \angle ORW$ (25)
$= \angle CDF$ (Constr.),
mithin auch $\angle NEP = \angle CDE$ (20 und 38).
Da nun die genannten Winkel BDE, CDF und CDE einzeln den Winkeln des gegebenen Dreiecks gleich sind (Constr.), so sind diesen letzteren auch die Winkel des Dreiecks ENP einzeln gleich; folglich ist $\triangle ENP$ dem gegebenen ähnlich (196); und da auch die Seiten jenes durch die gegebenen Punkte gehen, so ist $\triangle ENP$ das verlangte; w. z. b. w.

Anmerkung. Es leuchtet ein, dass, da die Gerade RO ganz beliebig gezogen ist, unendlich viele Dreiecke construirt werden können, welche den Anforderungen der Aufgabe genugen.

671. Wenn eine gerade Linie, ausserhalb und zwar auf derselben Seite von ihr zwei Punkte gegeben sind, auf ersterer den Punkt zu finden, von welchem aus zwei Linien, nach den gegebenen Punkten gezogen, mit der Geraden zu beiden Seiten Winkel bilden, die einen vorgeschriebenen Unterschied haben.

Auflösung. Man fälle aus einem der gegebenen Punkte, B (Fig. 507.), auf die gegebene Gerade OP eine Senkrechte BC; verlängere sie über ihren Fusspunkt hinaus um ihre eigene Länge, so dass also $BC = CD$; verbinde den Endpunkt D dieser Verlängerung mit dem andern gegebenen Punkte A und beschreibe über der so erhaltenen Geraden AD als Sehne einen Kreisabschnitt, dessen zugehöriger Peripheriewinkel AED gleich dem Nebenwinkel des vorgeschriebenen Unterschiedes ist, und zwar durch ein Verfahren, wie solches in der Auflösung zu A. 669 angegeben ist, so ist der Punkt E, in welchem der Umkreis die gegebene Gerade schneidet, der gesuchte.

Beweis. Man ziehe BE, so ist
$\angle AEO + \angle AEC = 2\ R$ (20)
$\angle AEC + \angle CED +$ dem gegebenen Unterschiede $= 2R$ (Constr.),
folglich $\angle AEO = \angle CED +$ dem gegebenen Unterschiede.
Nun ist $BC = CK$ (Constr.)
$CE = CE$
$\angle BCE = \angle ECD = R$ (Constr.),

mithin $\triangle BEC \cong \triangle CED$ (45),
folglich $\angle CED = \angle CEB$; daber ist nun auch
$\angle AEO = \angle CEB +$ dem gegebenen Unterschiede
oder $\angle AEO - \angle CEB =$ dem gegebenen Unterschiede.
Mithin entspricht der Punkt E den Bedingungen der Aufgabe; w. z. b. w.

Anmerkung. Wenn anstatt des Unterschiedes die Summe der Winkel gegeben ist, so beschreibe man über der Verbindungslinie AB (Fig 508.) der gegebenen Punkte als Sehne einen Kreisabschnitt, dessen zugehöriger Peripheriewinkel gleich dem Nebenwinkel der vorgeschriebenen Summe ist, so sind die beiden Punkte E und E_1, in denen die Peripherie die gegebene Gerade OP schneidet, zwei Punkte, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen; denn es ist $\angle AEB =$ dem Nebenwinkel der vorgeschriebenen Summe; aber $\angle AEB + \angle AEO + \angle BEP = 2R$, folglich $\angle AEO + \angle BEP =$ der vorgeschriebenen Summe. Ein Gleiches gilt in Betreff des Punktes E_1. Es leuchtet ein, dass die Aufgabe in diesem Falle nur dann zu lösen ist, wenn der Kreis die gegebene Gerade schneidet oder berührt; bei blosser Berührung erhalt man natürlich nur einen Punkt, welcher den Anforderungen der Aufgabe entspricht.

672. Wenn eine gerade Linie und ausserhalb derselben (und zwar auf derselben Seite) zwei Punkte gegeben sind, auf ersterer den Punkt zu finden, der solche Lage hat, dass die Geraden, welche ihn mit den gegebenen verbinden, mit der durch die letzteren gehenden Linie Winkel bilden, welche einen vorgeschriebenen Unterschied haben.

Auflösnng. Man verlängere die Gerade, welche die gegebenen Punkte A und B (Fig. 509.) verbindet, bis sie die gegebene Gerade in G schneidet; fälle von einem der gegebenen Punkte, B, die Senkrechte BC auf die gegebene Gerade und verlängere sie um ihre eigene Länge; verbinde den Endpunkt D dieser Verlängerung mit dem andern gegebenen Punkte und beschreibe (durch ein Verfahren, wie solches in der Auflösung zu A. 669 angegeben) über der so erhaltenen Geraden AD als Sehne einen Kreisabschnitt, dessen zugehöriger Peripheriewinkel gleich ist dem Nebenwinkel zu dem Unterschiede zwischen dem vorgeschriebenen Unterschiede und dem doppelten Winkel, den die beiden gegebenen Geraden mit einander bilden; so ist der Punkt E, in welchem die Peripherie die Gerade GC schneidet, der gesuchte.

Beweis. Es ist
$\angle AEG + \angle AEB + \angle BEC = 2R$ (20)
$\angle AED - 2\angle AGE +$ dem vorgeschriebenen Unterschiede $= 2R$
mithin [(Constr.),

$\angle AEG = \angle CED - 2\angle AGE +$ dem vorgeschriebenen Unterschiede,
$\angle CED = \angle BEC$ (weil $\triangle CED \cong \triangle BEC$ [Constr. u. 45]),
also
$\angle AEG = \angle BEC - 2\angle AGE +$ dem vorgeschriebenen Unterschiede,
und folglich
$\angle AEG + 2\angle AGE - \angle BEC =$ dem vorgeschriebenen Unterschiede ....1.
Nun ist $\angle EBF = \angle BEG + \angle BGE$
und $\angle EAG = \angle AEC - \angle BGE$ } (38), folglich
$\angle EBF - \angle EAG = \angle BEG + 2\angle BGE - \angle AEC$
$= \angle AEG + 2\angle BGE - \angle BEC$
= dem vorgeschriebenen Unterschiede (wegen 1).
Der Punkt E entspricht demnach den Bedingungen der Aufgabe und ist daher der gesuchte.

673. Ein Viereck zu construiren, welches nach den Ecken und Seiten zugleich centrisch ist, wenn eine seiner Seiten und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Auflösung. Man halbire die gegebenen Winkel, welche der gegebenen Seite AB (Fig. 510.) anliegen, verlängere die Halbirenden, bis sie sich in E schneiden; fälle von diesem Durchschnittspunkte auf die gegebene Seite die Senkrechte EF und beschreibe mit derselben als Radius aus E als Mittelpunkt einen Kreis; hierauf fälle man aus dem Mittelpunkte auf die nicht gemeinschaftlichen Schenkel der gegebenen Winkel die Senkrechten EG und EH und verbinde deren Fusspunkte durch die Gerade GH; fälle auf diese aus dem Endpunkte des Radius EF die Senkrechte FK und verlängere sie, bis sie die Peripherie zum zweiten Male in L schneidet; ziehe endlich durch diesen Durchschnittspunkt eine Tangente an den Kreis und verlängere sie nach beiden Seiten hin, bis sie die nicht gemeinschaftlichen Schenkel der gegebenen Winkel in C und D schneidet, so ist das so erhaltene Viereck ABCD nach den Seiten und Ecken centrisch.

Beweis. Da EF ein Radius des Kreises E und $AB \perp EF$ (Constr.), so ist AB eine den Kreis in F berührende Tangente (242).
Ferner ist $EG \perp AD$ (Constr.),
folglich $\angle AGE = R$
$= \angle AFE$
$\angle EAG = \angle EAF$ (Constr.)
$AE = AE$,
mithin $\triangle AGE \cong \triangle AFE$ (46),

daher $EG = EF$.
Aus ähnlichen Gründen $EH = EG = EF$.
Es sind also EG und EH Radien des Kreises E,
und da $AD \perp EG$ und zwar in G
und $BC \perp EH$ und zwar in H } (Constr.),
so sind AD und BC den Kreis in G und H berührende Tangenten (212). Da endlich auch CD den Kreis in L berührt (Constr.), so ist ABCD nach den Seiten centrisch (A. 618).

Zieht man ferner den Radius EL nach dem Berührungspunkte der Tangente CD, so ist

$$\angle FEH = \angle FKH + \angle EFL + \angle EHG \text{ (38)}$$
$$\angle GEL = \angle GKL - \angle ELF - \angle EGH \text{ (38), folglich}$$
$$\angle FEH + \angle GEL = \angle FKH + \angle GKL + \angle EFL - \angle ELF + \angle EHG - \angle EGH,$$

aber $\angle EFL = \angle ELF$, $\angle EHG = \angle EGH$ } (51) und
$\angle FKH + \angle GKL = 2R$ (Constr.), mithin
$\angle FEH + \angle GEL = 2R$ .... 1.
Nun sind die Winkel des Vierecks $BFEH = 4$ Rechten (104), aber
$\angle BFE + \angle BHE = 2R$, folglich
$\angle ABC + \angle FEH = 2R$. Aus ähnlichen Gründen
$\angle ADC + \angle GEL = 2R$. Mithin wegen 1
$\angle ABC + \angle ADC = 2R$, daher auch
$\angle BAD + \angle BCD = 2R$ (104).
Mithin ABCD nach den Ecken centrisch (244, Z. 4); w. z. b. w.

674. Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels eine Gerade von vorgeschriebener Länge so zu ziehen, dass das entstandene Dreieck einen vorgeschriebenen Flächenraum hat.

Auflösung. Man verlängere einen der Schenkel des gegebenen Winkels BAC (Fig. 571.) über den Scheitel hinaus um ein Stück AD, welches beliebig, aber kleiner als die vorgeschriebene Länge ist; beschreibe aus dem Endpunkte der Verlängerung mit der vorgeschriebenen Länge als Radius einen Kreis und ziehe in demselben den Halbmesser DE nach dem Punkte, in welchem die Peripherie den nicht verlängerten Schenkel des gegebenen Winkels schneidet; beschreibe hierauf um das so entstandene Dreieck ADE einen Kreis M; construire nun über DE als Grundlinie und zwar auf der dem Dreieck ADE abgekehrten Seite ein beliebiges Dreieck EDF, welches den vorgeschriebenen Flächenraum hat; ziehe

durch die Spitze F eine Parallele mit der Grundlinie; verbinde einen der Durchschnittspunkte dieser Parallele durch die Peripherie des Kreises M mit den Endpunkten der Grundlinie des Dreiecks EDF durch die Geraden DH und EH; schneide auf den Schenkeln des gegebenen Winkels vom Scheitel aus Stücke ab, welche einzeln gleich den zuletzt genannten Geraden sind, also AB = HE und AC = HD, und vollende das Dreieck ABC, so ist dieses das verlangte.

Beweis. Es ist

$\angle DHE + \angle DAE = 2R$ (275)

$\angle BAC + \angle DAE = 2R$ (20),

folglich $\angle DHE = \angle BAC$ = dem gegebenen Winkel (Constr.),

$\left.\begin{matrix} HE = AB \\ HD = AC \end{matrix}\right\}$ (Constr.),

mithin $BC = DE$ (45) = der vorgeschriebenen Länge (Constr.);

endlich ist $\Delta ABC = \Delta HED$ (45, Z.)

$\Delta HED = \Delta DEF$ (84),

also $\Delta ABC = \Delta DEF$ = dem vorgeschriebenen Flächenraum (C.).

Mithin ist ΔABC das in der Aufgabe verlangte; w. z. b. w.

Anmerkung 1. Da EH auch auf dem Schenkel AC und DH auf dem Schenkel AB aufgetragen werden kann, so folgt hieraus, dass sich zwei Dreiecke construiren lassen, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Anmerkung 2. Zieht man durch den Mittelpunkt M: $LMK \perp DE$, so ist diese Gerade die grösste Linie, die sich vom Punkte K nach dem Umkreise ziehen lässt (240); folglich ist das Dreieck, dessen Flächenraum durch $\frac{DE \cdot LK}{2}$ ausgedrückt wird (203, Z. 6), das grösste, welches dem Inhalte nach über DE als Grundlinie in den Kreisabschnitt DLHE beschrieben werden kann (84, Z. 2); daher kann die Aufgabe nicht gelöst werden, sobald der vorgeschriebene Flächenraum jenes angegebene Maximum überschreitet.

675. In ein Dreieck drei Kreise so zu beschreiben, dass jeder von ihnen sowohl zwei Seiten als auch die beiden andern Kreise berührt.

Anmerkung. In Betreff der im Folgenden vorkommenden Rechnungen verweisen wir auf die Zusätze und Anmerkungen von 203.

Analysis. Es seien a und b (Fig. 512.) zwei Kreise, die sich in z von aussen berühren. Man ziehe die innere gemeinschaftliche Tangente $zw_{,,}$ und die äussere $u_{,,}v_{,,}$, welche die erstere in $w_{,,}$ schneidet, so ist:

1. $u_{,,}w_{,,} = zw_{,,} = w_{,,}v_{,,}$ (250, Z. 4).

Man ziehe $w_{,,}b$ und $w_{,,}a$, so ist

$$\left.\begin{aligned} \angle u_{,,}w_{,,}a &= \angle aw_{,,}z \\ \angle v_{,,}w_{,,}b &= \angle bw_{,,}z \end{aligned}\right\} (250),$$

folglich $\angle aw_{,,}b = R$ (20)

$= \angle azw_{,,}$ (243)

$= \angle zaw_{,,} + \angle aw_{,,}z$ (38),

daher $\angle zaw_{,,} = \angle zw_{,,}b$,

mithin $\triangle azw_{,,} \sim \triangle zw_{,,}b$ (196),

also verhält sich $az : w_{,,}z = w_{,,}z : bz$,

folglich $az \,.\, bz = w_{,,}z^2$

$$\left.\begin{aligned} &= u_{,,}w_{,,}^2 \\ &= v_{,,}w_{,,}^2 \end{aligned}\right\} \text{(wegen 1), und mithin}$$

2. $u_{,,}w_{,,} = w_{,,}z = w_{,,}v_{,,} = \sqrt{az \,.\, bz}.$

Errichtet man nun in $w_{,,}$ auf $u_{,,}v_{,,}$ eine Senkrechte $w_{,,}c_1$ und beschreibt aus einem beliebigen Punkte c_1 derselben mit $c_1u_{,,}$ als Halbmesser einen Kreis, so geht dieser auch durch den Punkt $v_{,,}$, da $c_1u_{,,} = c_1v_{,,}$ als Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks, und schneidet die Kreise a und b zum zweiten Male in y und x. Man ziehe ay und bx und verlängere sie sowohl über y und x bis zu ihrem Durchschnitt in c, als auch über a und b, bis sie die Peripherie des Kreises c_1 beziehungsweise in t_1 und r_1 schneiden; ziehe ferner in den Kreisen a und b die Radien $au_{,,}$ und $bv_{,,}$ und verlängere sie über die Mittelpunkte hinaus, bis sie die Peripherie des Kreises c_1 beziehungsweise in $t_{,,}$ und $r_{,,}$ schneiden; ziehe endlich die gemeinschaftliche Sehne $u_{,,}y$ der Kreise a und c_1 und die gemeinschaftliche Sehne $v_{,,}x$ der Kreise b und c_1, so ist, da die beiden Sehnen $u_{,,}t_{,,}$ und $v_{,,}r_{,,}$ senkrecht auf $u_{,,}v_{,,}$ stehen (243), $u_{,,}v_{,,}$ die Entfernung zwischen ihnen; da aber $u_{,,}w_{,,} = w_{,,}v_{,,}$ (wegen 1) und die genannten Sehnen parallel sind (26, Z.), so haben sie auch gleiche Entfernung vom Mittelpunkte, mithin

$$u_{,,}t_{,,} = v_{,,}r_{,,} \text{ (250, Z. 2).}$$

Nun ist $au_{,,} = ay$ (als Radien des Kreises a),

folglich $\angle yn_{,,}t_{,,} = u_{,,}yt_1$ (51),

mithin $\text{arc. } yt_{,,} = \text{arc. } u_{,,}t_1$ (245),

daher auch $\text{arc. } yt_{,,}t_1 = \text{arc. } u_{,,}t_1t_{,,}$,

folglich $yt_1 = u_{,,}t_{,,}$ (245, Z. 5);

aus ähnlichen Gründen $xr_1 = v_{,,}r_{,,}$,

mithin $yt_1 = xr_1$,

daher $\quad$ arc. $yt_{,,}t_1$ = arc. $xr_{,,}r_1$ (245, Z. 5),
also auch $\quad$ arc. $xyt_{,,}t_1$ = arc. $yxr_{,,}r_1$,
mithin ist, wenn man t_1r_1 zieht:

$$\angle t_1r_1c = \angle r_1t_1c \quad (245),$$

folglich $\quad ct_1 = cr_1$ (52),
und mithin $\quad ct_1 - yt_1 = cr_1 - xr_1$,
d. i. $\quad cy = cx$.

Man beschreibe nun aus c mit cy als Radius einen Kreis, so geht derselbe auch durch den Punkt x, und da die Summe der Radien ay und cy der Kreise a und c gleich der Entfernung ihrer Mittelpunkte ist und ebenso die Summe der Radien bx und cx der Kreise b und c gleich der Entfernung bc der Mittelpunkte, so berührt Kreis c die Kreise a und b in y und x von aussen (263, Anmk.).

Man ziehe ferner die Axe ac_1, verlängere sie bis zu ihrem Durchschnitt A_1 mit der verlängerten Geraden $u_{,,}v_{,,}$ und ziehe A_1y, so ist A_1y eine Tangente des Kreises a, welche ihn in y berührt; denn ac_1 oder ac_1A_1 halbirt die Sehne $yu_{,,}$ unter rechten Winkeln (264), woraus sich die Congruenz der Dreiecke A_1dy und $A_1du_{,,}$ ergibt (45), folglich $\quad A_1y = A_1u_{,,}$;
es ist aber $A_1u_{,,}$ eine Tangente des Kreises a, mithin ist auch A_1y eine Tangente dieses Kreises (250, Z. 4 u. 5); und da ferner $A_1y \perp ay$ (243); y aber der Endpunkt des Halbmessers cy des Kreises c ist, so ist A_1y gleichzeitig eine Tangente des Kreises c (242), die ihn in y berührt; es ist also A_1y die innere gemeinschaftliche Tangente der sich von aussen in y berührenden Kreise a und c.

Man beschreibe nun aus c_1 als Mittelpunkt einen zweiten Kreis mit $c_1w_{,,}$ als Halbmesser, der also $u_{,,}v_{,,}$ in $w_{,,}$ berührt. Diesen Kreis werden wir fernerhin, unter Benutzung der folgenden Fig. 513, ausschliesslich mit c_1 bezeichnen.

Es ist der Punkt A_1 der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise a und c_1 (A. 576), da $au_{,,} \parallel c'w_{,,}$ (26, Z.); hieraus folgt, dass

3. A_1y eine Tangente des Kreises c_1 ist (A. 576, Z. 2).

Es sei der Punkt t der Berührungspunkt.

Man kann nunmehr sagen, dass die von dem Berührungspunkte y aus gezogene innere gemeinschaftliche Tangente yt der Kreise a und c den Kreis c_1 berühre.

Indem man auf ganz ähnliche Weise in Betreff der Kreise b und c, wie so eben in Betreff der Kreise a und c, verfährt, beweist

man, dass die innere gemeinschaftliche Tangente xs der Kreise b und c, von x aus gezogen, den Kreis c_1 berühre.

Es ist $zw_{,,}$ die Potenzlinie der Kreise a und b
xs die Potenzlinie der Kreise b und c
yt die Potenzlinie der Kreise a und c } (A. 593, Z. 2).

Diese drei Linien schneiden sich, hinreichend verlängert, in einem Punkte P (A. 594); hieraus folgt

4) $Pz = Px = Py$ (A. 592 und A. 589, Zus. 1).

Daher ist P der Mittelpunkt und $Px = Pz = Py$ der Halbmesser des innern Kreises des Dreiecks abc.

Fällt man nun $c\gamma \perp ab$, so ist:

$$ac^2 = c\gamma^2 + a\gamma^2 \quad (87)$$

$$bc^2 = c\gamma^2 + b\gamma^2$$

$$= c\gamma^2 + (ab - a\gamma)^2, \text{ mithin}$$

$$ac^2 - bc^2 = a\gamma^2 - (ab - a\gamma)^2$$

$$= a\gamma^2 - (ab^2 - 2ab\,.\,a\gamma + a\gamma^2)$$

$$= 2ab\,.\,a\gamma - ab^2, \text{ folglich}$$

$$a\gamma = \frac{ab^2 + ac^2 - bc^2}{2ab}. \text{ Ferner ist}$$

$$c\gamma^2 = ac^2 - a\gamma^2$$

$$= (ac + a\gamma)(ac - a\gamma),$$

setzt man hierin den für $a\gamma$ gefundenen Werth, so erhält man:

$$c\gamma^2 = \left(ac + \frac{ab^2 + ac^2 - bc^2}{2ab}\right)\left(ac - \frac{ab^2 + ac^2 - bc^2}{2ab}\right)$$

$$= \frac{(2ab\,.\,ac + ab^2 + ac^2 - bc^2)(2ab\,.\,ac - ab^2 - ac^2 + bc^2)}{4ab^2}$$

$$= \frac{(ab+ac+bc)(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)(-ab+ac+bc)}{4ab^2}$$

folglich

$$c\gamma = \frac{\sqrt{(ab+ac+bc)(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)(-ab+ac+bc)}}{2ab}$$

aber $\triangle abc = \frac{ab\,.\,c\gamma}{2}$ (203, Zus. 6);

substituirt man hierin den gefundenen Werth von $c\gamma$, so hat man:

$$\triangle abc = \frac{\sqrt{(ab+ac+bc)(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)(-ab+ac+bc)}}{4}$$

aber $\triangle abc = \frac{Px}{2}(ab + ac + bc)$ (272, Zus. 2),

folglich $\frac{Px}{2}(ab + ac + bc)$

$$= \frac{\sqrt{(ab+ac+bc)(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)(-ab+ac+bc)}}{4}$$

und mithin Px

$$= \frac{\sqrt{(ab+ac+bc)(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)(-ab+ac+bc)}}{2(ab+ac+bc)}$$

$$= \sqrt{\frac{(ab+ac+bc)(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)(-ab+ac+bc)}{4(ab+ac+bc)(ab+ac+bc)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)(-ab+ac+bc)}{4(ab+ac+bc)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2az \,.\, 2bz \,.\, 2cx}{4(2az+2bz+2cx)}}$$

$$= \sqrt{\frac{8az \,.\, bz \,.\, cx}{8(az+bz+cx)}}; \text{ es ist also: } \quad 5) \ Pz = Py = Px$$

$$= \sqrt{\frac{az \,.\, bz \,.\, cx}{az+bz+cx}}.$$

Da ferner yt und xs gemeinschaftliche, in P sich schneidende Tangenten der Kreise c und c_1 sind, mithin die nach den Berührungspunkten gezogenen Radien cy und c_1t, sowie cx und c_1s parallel, weil cy und $c_1t \perp yt$ und cx und $c_1s \perp xs$, so liegt der Durchschnittspunkt P auf der Axe der genannten Kreise (A. 573); cPc_1 ist also eine einzige gerade Linie und folglich:

$$\triangle Pxc \sim \triangle Psc_1 \quad (196)$$

daher verhält sich: $Px : Ps = cx : c_1s$

mithin auch $Px + Ps : Px = cx + c_1s : cx$ (153)

d. i. $sx : Px = cx + c_1s : cx$

Nun ist $\left.\begin{array}{l} Px = Py \\ Ps = Pt \end{array}\right\}$ (als Tangenten)

also $sx = yt$

aber $A_1y = A_1u_{,,}$

und $A_1t = A_1w_{,,}$ $\Big\}$ (als Tangenten)

folglich auch $A_1y - A_1t = A_1u_{,,} - A_1w_{,,}$

d. i. $yt = u_{,,}w_{,,}$

mithin ist $u_{,,}w_{,,} = sx$

und folglich $sx = \sqrt{az \,.\, bz}$ (wegen 2).

Setzt man diesen Werth für sx, sowie den in 5 für Px gefundenen in obige Proportion, so hat man:

$$\sqrt{az \,.\, bz} : \sqrt{\frac{az \,.\, bz \,.\, cx}{az+bz+cx}} = cx + c_1s : cx, \text{ folglich}$$

$$(cx + c_1 s) \sqrt{\frac{az \,.\, bz \,.\, cx}{az + bz + cx}} = cx \sqrt{az \,.\, bz} \quad (150)$$

also
$$cx + c_1 s = \frac{cx\sqrt{az \,.\, bz}}{\sqrt{\frac{az \,.\, bz \,.\, cx}{az + bz + cx}}}$$
$$= cx \sqrt{\frac{az \,.\, bz}{\frac{az \,.\, bz \,.\, cx}{az + bz + cx}}}$$
$$= cx \sqrt{\frac{az \,.\, bz\,(az + bz + cx)}{az \,.\, bz \,.\, cx}}$$
$$= cx \sqrt{\frac{az + cz + cx}{cx}}$$
$$= \sqrt{\frac{cx^2\,(az + bz + cx)}{cx}}$$
$$= \sqrt{cx\,(az + bz + cx)}$$

mithin $(cx + c_1 s)^2 = cx\,(az + bz + cx)$

d. i. $cx^2 + 2cx \,.\, c_1 s + c_1 s^2 = cx\,(az + bz + cx)$; folglich ist:

$$6) \quad c_1 s^2 = cx\,(az + bz + cx) - cx^2 - 2cx \,.\, c_1 s$$
$$= cx\,(az + bz - 2c_1 s).$$

Man ziehe von a aus eine Tangente as_1 an Kreis c_1, den Radius $c_1 s_1$ nach dem Berührungspunkte und $c_1 q$ senkrecht auf $au_{,,}$, so ist:
$$as_1{}^2 = ac_1{}^2 - c_1 s_1{}^2 \ (87)$$
$$ac_1{}^2 = c_1 q^2 + aq^2 \ (87)$$
$$= c_1 q^2 + (au_{,,} - qu_{,,})^2,$$

daher $as_1{}^2 = c_1 q^2 + (au_{,,} - qu_{,,})^2 - c_1 s_1{}^2$

nun ist $au_{,,} = az$ (als Radien)
$$qu_{,,} = c_1 w_{,,} \ (56)$$
$$= c_1 s_1 \text{ (als Radien)}$$
$$c_1 q = u_{,,} w_{,,} \ (56)$$
$$= \sqrt{az \,.\, bz} \text{ (wegen 2)}$$

also $c_1 q^2 = az \,.\, bz.$

Diese Werthe in obige Gleichung gesetzt gibt:
$$as_1{}^2 = az \,.\, bz + (az - c_1 s_1)^2 - c_1 s_1{}^2$$
$$= az \,.\, bz + az^2 - 2az \,.\, c_1 s_1 + c_1 s_1{}^2 - c_1 s_1{}^2$$

und daher $7) \quad as_1{}^2 = az\,(az + bz - 2c_1 s_1)$

mithin
$$\frac{cx}{az} \,.\, as_1{}^2 = \frac{cx}{az} \,.\, az\,(az + bz - 2c_1 s_1)$$
$$= cx\,(az + bz - 2c_1 s_1)$$
$$= cx\,(az + bz - 2c_1 s) \text{ (weil } c_1 s_1 = c_1 s \text{ als Rdn.)}$$

$= c_1 s^2$ (wegen 6); daher

8) $\frac{c_1 s}{as_1} = \sqrt{\frac{cx}{az}}$.

Man ziehe ferner diejenige äussere gemeinschaftliche Tangente $n_1 v_1$ der Kreise a und c, die den Kreis b nicht trifft; ziehe die Radien au_1 und cv_1 nach den Berührungspunkten; verlängere Py bis zum Durchschnitt w_1 mit der Tangente $u_1 v_1$ und ziehe aw_1, so ist: $v_1 w_1 = w_1 n_1 = yw_1$ und aus ähnlichen Gründen, wie oben für 2, ist

9) $v_1 w_1 = w_1 u_1 = yw_1 = \sqrt{ay \cdot cy}$
$= \sqrt{az \cdot cx}$.

Dividirt man nun $w_1 u_1$ und seinen gleichen Werth $\sqrt{az \cdot cx}$ durch $au_1 = az$ (als Radien), so erhält man:

$$\frac{w_1 u_1}{an_1} = \frac{\sqrt{az \cdot cx}}{az}$$
$$= \sqrt{\frac{az \cdot cx}{az^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{cx}{az}}$$
$$= \frac{c_1 s}{as_1} \text{ (wegen 8)}; \quad = \frac{c_1 s_1}{as_1} \text{ (weil } c_1 s = c_1 s_1$$

als Radien), daher:

10) $w_1 n_1 : au_1 = c_1 s_1 ; as_1$

$\angle au_1 w_1 = R$
$= \angle as_1 c_1$ } (243)

folglich $\triangle au_1 w_1 \sim \triangle as_1 c_1$ (198)

mithin 11) $\angle c_1 as_1 = \angle u_1 aw_1$.

Verlängert man nun die Tangenten $v_1 u_1$ und $v_{\prime\prime} n_{\prime\prime}$ bis zu ihrem Durchschnitt in A und zieht Aa, so ist

$\angle u_1 w_1 y + \angle n_1 ay = 2R$ (275)

oder $\angle Aw_1 A_1 + \angle u_1 ay = 2R$

$\angle Aw_1 A_1 + \angle w_1 AA_1 + \angle w_1 A_1 A = 2R$ (38),

mithin $\angle u_1 ay = \angle w_1 AA_1 + \angle w_1 A_1 A$

also auch $\frac{1}{2} \angle u_1 ay = \frac{1}{2} (\angle w_1 AA_1 + \angle w_1 A_1 A)$

d. i. $\angle u_1 aw_1 = \angle aAA_1 + \angle aA_1 A$ (250)

$\angle aAA_1 + \angle aA_1 A + \angle AaA_1 = 2R$ (38)

folglich $\angle u_1 aw_1 + \angle AaA_1 = 2R$, und wegen 11:

$\angle c_1 as_1 + \angle AaA_1 = 2R$,

mithin bilden die Linien Aa und as_1 eine einzige Gerade (21), und man kann daher nun sagen:

Die Gerade Aas_1, welche den durch die beiden äussern gemeinschaftlichen Tangenten v_1A der Kreise a und c und $v_{11}A$ der Kreise a und b gebildeten Winkel v_1Av_{11} halbirt, berührt gleichzeitig den Kreis c_1.

Man ziehe ferner an die Kreise b und c diejenige äussere gemeinschaftliche Tangente vu, welche dem Kreise a nicht begegnet; verlängere sie bis zu ihren Durchschnitten B und C mit den verlängerten äusseren Tangenten $u_{11}v_{11}$ der Kreise a und b und u_1v_1 der Kreise a und c; ziehe vom Mittelpunkte b die Tangente bs_{11} an Kreis c_1; ziehe hierauf Bb, so ist aus ähnlichen Gründen, wie so eben für Aas_1 angegeben, Bbs_{11} eine einzige Gerade, welche den Winkel ABC halbirt und gleichzeitig den Kreis c_1 berührt.

Die beiden Geraden As_1 und Bs_{11} mögen sich, verlängert, in O schneiden; zieht man CO, so wird durch diese auch der Winkel ACB halbirt (A. 27) und CO geht durch den Mittelpunkt des Kreises c, da cC ebenfalls den Winkel ACB halbirt (45), beide Linien also zusammenfallen.

Man hat nunmehr ein Dreieck ABC um die drei Kreise a, b und c, von denen jeder die beiden andern von aussen berührt, dergestalt construirt, dass jede Seite zwei jener Kreise von aussen berührt, und dass die Winkelhalbirenden BO und AO mit der Dreiecksseite AB ein Dreieck ABO bilden, dessen innerer Kreis der Kreis c_1 ist.

Mit Bezug auf das von Kreis c_1 weiter oben in Folge von 3 Gesagte kann man demnach nun wiederum sagen: dass der innere Kreis c_1 des Dreiecks ABO von zweien der drei inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise a, b und c, nämlich von Py und Px, berührt wird, während er die Seite AB des Dreiecks ABC in demselben Punkte w_{11} berührt, in welchem die dritte jener Tangenten, Pz, dieselbe schneidet.

Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass die beiden innern Kreise a_1 und b_1 der Dreiecke BOC und AOC beziehungsweise von Py und Pz, sowie von Px und Pz berührt werden, während der erstere die Dreiecksseite BC, der letztere AC in dem Punkte berührt, in welchem bezüglich die dritte Tangente die Seite schneidet

Vom Punkte $w_{,,}$ aus, dem Berührungspunkte des Kreises c_1 mit der Seite AB, kann man nunmehr, wie erwiesen, eine Tangente $w_{,,}zP$ ziehen, welche die vier Kreise a, b, a_1 und b_1 berührt, und diese Tangente ist gleichzeitig die innere gemeinschaftliche Tangente der Kreise a und b. Aehnliche Tangenten können also auch von den dem Punkte $w_{,,}$ entsprechenden Punkten w_1 und w gezogen werden.

Ist daher das Dreieck ABC gegeben, und man soll in dasselbe drei Kreise so beschreiben, dass jeder von ihnen sowohl zwei Seiten, als auch die beiden andern Kreise berührt, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden folgende

Construction. Man verbinde den Mittelpunkt O des innern Kreises mit den Spitzen des Dreiecks, wodurch die Dreieckswinkel halbirt werden; beschreibe in die so entstandenen Dreiecke BOC, AOC und AOB ihre inneren Kreise a_1, b_1, c_1; ziehe von dem Punkte $w_{,,}$, wo der eine von ihnen, c_1, die Seite AB des Urdreiecks berührt, an einen der beiden andern, b_1, dergestalt eine Tangente, dass dieselbe auch den dritten, a_1, berührt, was immer möglich ist, und beschreibe endlich einen Kreis a, welcher diese Tangente und die beiden Seiten des Dreiecks ABC berührt, welche auch von den beiden genannten Hülfskreisen, b_1 und c_1, berührt werden, so ist dieser Kreis einer der drei gesuchten. Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet man die beiden andern.

676. In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten (oder ihre Verlängerungen) durch drei gegebene Punkte gehen.

Auflösung. Man bestimme die den gegebenen Punkten G, H, J (Fig. 471.) zugehörigen Polaren und verlängere dieselben bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt; verbinde in dem so entstandenen Dreiecke ABC jeden der gegebenen Punkte mit derjenigen Ecke, die seiner Polare gegenüberliegt; verlängere diese Geraden bis zum Durchschnitt mit den Gegenseiten oder Polaren; verbinde endlich diese letzteren Durchschnittspunkte untereinander; so sind die sechs Punkte, in denen die Seiten des so entstandenen Dreiecks DEF die Peripherie schneiden, die Spitzen zweier Dreiecke, MKO und LPN, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 628.

677. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Spitzen auf drei der Lage nach gegebenen geraden Linien liegen.

Auflösung. Man bestimme die den gegebenen Geraden BC, AC, AB (Fig. 471.) zugehörigen Pole G, H und J; verbinde jeden derselben mit der seiner Polare gegenüberstehenden Ecke des von den gegebenen Geraden gebildeten Dreiecks ABC; verlängere diese Transversalen bis zum Durchschnitt mit den genannten Gegenseiten oder Polaren; verbinde diese Durchschnittspunkte untereinander; so sind die Punkte, in denen die Seiten des so erhaltenen Dreiecks DEF die Peripherie schneiden, die Berührungspunkte zweier um den Kreis zu beschreibenden Dreiecke, RTV und QSU, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Beweis folgt unmittelbar aus A. 629.

Inhaltsverzeichniss.

Vierter Abschnitt.

Ueber den Kreis.

I. Lehrsätze . . . . S. 1
II. Aufgaben . . . . „ 166